

$$P = \frac{x+y}{2}$$

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$y = mx + b$$

$$A = \frac{h(b+b)}{2}$$

$$4x - 37 = 83$$

$$xy^2 = 2x^2 - 3$$

$$C = 2\pi r$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x + 2y = 18$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad v = \frac{d}{t}$$

ALGEBRA 7

7 ALGEBRA

7.1 Conceptos básicos

Para comenzar el estudio del álgebra necesitamos conocer el vocabulario, los símbolos apropiados y las ideas básicas. Todos estos conocimientos nos ayudarán a resolver problemas.

En lo sucesivo, usaremos números y letras. Una letra puede representar número o un conjunto de números. Usando letras podemos plantear y resolver problemas mediante operaciones sencillas, sin necesidad de realizar procesos complicados, usando números. Por lo general, usamos letras relacionadas con el valor que representan. Cada letra representa un valor diferente. Por ejemplo, usamos la **P** para representar el perímetro, la **A** para el área y la **v** para la velocidad. Del mismo modo, la temperatura se representa con la **T** y el tiempo con la **t**. En este último ejemplo se ve claramente que **T** no representa lo mismo que **t**. En otras palabras, las letras mayúsculas y minúsculas no son intercambiables. Además de las letras de nuestro alfabeto, a veces, usaremos letras griegas.

Una expresión algebraica consiste de números y letras unidos por signos de operaciones y símbolos de agrupación.

Debemos hacer notar que todos los elementos mencionados anteriormente no tienen que estar presentes para formar una expresión algebraica.

Ejemplos:

- 1) $3x + 2y$
- 2) $4n^2 + 3n + 29$
- 3) $2\sqrt{3x - 5}$
- 4) $\frac{3}{2a} - \frac{5}{3a}$

Una constante es un símbolo cuyo valor no cambia.

Generalmente se representan por un número, las primeras letras del alfabeto o alguna letra griega.

Ejemplos:

- 1) En la expresión $5x + 8z$, las constantes son 5 y 8.
- 2) En la expresión $2\pi r$, las constantes son 2 y π (π es aproximadamente igual a 3.14).
- 3) En la expresión $2at^2 + 5t$, las constantes son 2, a y 5.

Una variable es un símbolo que toma valores diferentes.

Generalmente, se representan por las últimas letras del alfabeto.

Ejemplos:

- 1) En la expresión $3x^2 - 4x$, la única variable es x .
- 2) En la expresión $3t + w$, las variables son t y w .

Un término es una parte de una expresión algebraica. Los términos se separan entre sí por los signos (+) o (-).

Una expresión algebraica puede tener uno o más términos.

Ejemplos:

- 1) En la expresión $\sqrt{5xy} + 3x^2 - 4y$ los signos (+) y (-) separan la expresión en tres términos. Estos términos son:

$\sqrt{5xy}$	+	$3x^2$	+	$-4y$
primer término		segundo término		tercer término

Hay que señalar que el signo (-) es parte del tercer término.

- 2) En la expresión $5n^3 - 8n(2n - 1)$ hay solamente dos términos. Estos términos son:

$$\boxed{5n^3} + \boxed{-8n(2n - 1)}$$

primer término segundo término

- 3) En la expresión $\frac{a + b}{bc} + 15(ab^2 + 1) + 9$ hay tres términos.

$$\boxed{\frac{a + b}{bc}} + \boxed{15(ab^2 + 1)} + \boxed{9}$$

- 4) En la expresión $4x(3x^2 + x - 4)(2x + 5)$ hay solamente un término.

En los ejemplos (2), (3) y (4) hemos considerado las expresiones entre paréntesis y la fracción como un todo.

Llamamos factores a los elementos que al multiplicarse dan lugar a un producto. Existen factores numéricos y factores literales, representados por números o letras.

Esto nos recuerda la definición de factor que aparece en el Capítulo 1. Debemos señalar que a pesar de que 1 es factor de todo número, por lo general no se escribe.

Ejemplos:

- 1) $(8)(3) = 24$
8 y 3 son factores de 24
- 2) $(5)(x) = 5x$
5 y x son factores de 5x
- 3) $(3)(a)(b)(b) = 3ab^2$
3, a y b son factores de $3ab^2$ (un factor puede repetirse).

Ejercicio 7.1

Hallar el número de términos.

- 1) $2x^2 + 8x - 1$
- 2) $(2x + y)(5x + 2y)$
- 3) $5xy + 2x^2 + 3y - 9$
- 4) $\frac{3x}{x^2 + 1} - \frac{5}{x}$
- 5) $3u^2 + 4$
- 6) $2\pi r + rh - 1$
- 7) $\frac{3(x + 2y)}{x + 1}$
- 8) $(x - 8)^3 + 6x$
- 9) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
- 10) $(2a + 1)(2a - 1) - (3b + 2)(3b - 2)$

7.2 Evaluación de expresiones algebraicas

A menudo necesitamos saber el valor de una expresión algebraica. Teniendo en cuenta que las variables que aparecen en ella representan números, podemos sustituir estas variables por números y efectuar las operaciones indicadas. Cuando hacemos esto estamos hallando un **valor numérico de la expresión**. Por lo tanto, evaluar una expresión algebraica es hallar un valor numérico de la misma.

Ejemplos:

- 1) Evaluar $3ab - c$ para $a = 1$, $b = 5$, $c = -2$

Primero, procedemos a colocar los valores numéricos dados en el lugar que ocupaba la variable correspondiente. Colocamos estos valores entre paréntesis para evitar errores y posibles confusiones.

En nuestro caso, obtenemos $3(1)(5) - (-2)$.

Siguiendo el orden de las operaciones indicadas, es necesario multiplicar primero y restar después.

Al multiplicar, conseguimos $15 - (-2)$ y por último, restando llegamos al valor final que es 17.

- 2) Evaluar $2xy^2 + 3z^4$ para $x = -3$, $y = 2$, $z = -1$

Procedemos a sustituir las variables por los valores numéricos correspondientes y obtenemos

$$2(-3)(2)^2 + 3(-1)^4.$$

Siguiendo el orden de las operaciones indicadas, hallamos las potencias primero y resulta $2(-3)(4) + 3(1)$, luego multiplicamos para conseguir $-24 + 3$ y finalmente, sumamos y hallamos el resultado que es -21 .

3) Evaluar $\frac{a^3 - 2b^2}{c}$ para $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$

Sustituyendo, obtenemos $\frac{(3)^3 - 2(-1)^2}{(5)}$

Debemos recordar que una fracción es equivalente a una división. La expresión anterior equivale a $[(3)^3 - 2(-1)^2] \div (5)$, lo cual nos obliga a efectuar primero las operaciones dentro del corchete. Por lo tanto, cuando evaluamos una fracción debemos evaluar el numerador primero, después el denominador, y por último, dividir. En nuestro caso, el numerador es $(3)^3 - 2(-1)^2$ que resulta ser $27 - 2(1)$. Luego, multiplicamos y restamos para obtener 25 y finalmente, dividimos por el denominador, obteniendo $25 \div 5 = 5$.

4) Evaluar $5x(y^3 + 8)$ para $x = 2$, $y = -1$

Sustituyendo, obtenemos $5(2)((-1)^3 + 8)$.

Siguiendo el orden de las operaciones indicadas, resulta

$$\begin{aligned} &5(2)((-1) + 8) \\ &5(2)(7) \\ &70 \end{aligned}$$

5) Evaluar $2x^3 - 4y^5$ para $x = -3$, $y = -2$

Sustituyendo, obtenemos $2(-3)^3 - 4(-2)^5$.

Siguiendo el orden de las operaciones, resulta

$$\begin{aligned} &2(-27) - 4(-32) \\ &-54 + 128 \\ &74 \end{aligned}$$

Observando los ejemplos anteriores, podemos concluir que las potencias pares de números negativos son siempre positivas, mientras que las impares resultan negativas. Si consideramos el caso de las potencias de (-1) , es fácil ver que $(-1)^{\text{par}} = 1$ y $(-1)^{\text{impar}} = -1$.

Ejemplos:

	Exponente	Resultado
1) $(-2)^6 = 64$	par	positivo
2) $(-3)^5 = -243$	impar	negativo
3) $(-1)^{1989} = -1$	impar	negativo
4) $(-1)^{1990} = 1$	par	positivo

Ejercicio 7.2

Evaluar cada expresión para los valores indicados.

1) $x^2 - 3y$	$x = -2$, $y = -1$
2) $3a + 5b^2$	$a = 4$, $b = -2$
3) $5x^2 - 2y^5$	$x = -3$, $y = -1$
4) $\frac{3a - 4b}{5c}$	$a=4$, $b = -2$, $c=2$
5) $3p(q - r^2)$	$p = -1$, $q = -3$, $r=5$
6) $(-1)^{a+1} - (-1)^{b+2}$	$a=99$, $b=101$
7) $3a - 4b^2 + 5c^3$	$a=5$, $b=4$, $c=3$
8) $\frac{x^2 - y^2}{x - 5y}$	$x=7$, $y = -1$
9) $\frac{3}{4}a - \frac{4}{3}b$	$a = 12$, $b = -6$
10) $0.3x + 1.2y^2$	$x=20$, $y = -10$

7.3 Repaso

Hallar el número de términos.

- 1) $2x - 3x(x^2 - 1)$
- 2) $y^3 - 2y + 1$
- 3) $(3a + 2)(2a + 3)$
- 4) $5x(x^2 + 2x - 3)$
- 5) $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 7$
- 6) $8x + 3y - 1$

7) $\sqrt{x + 10 - 2y} + 3$

8) $(a + b)^5 + (b + c)^4$

9) $2 - \frac{5x + 3y}{11}$

10) $a + b + c - (a - b)^3$

Evaluar cada expresión para los valores indicados.

11) $x^2 - yz$

$x = 3, y = 2, z = 1$

12) $a^2 - b^2 + c^2$

$a = -3, b = 2, c = -1$

13) $p^2 - q^3$

$p = 3, q = -2$

14) $x^2y - xy^2$

$x = -2, y = 3$

15) $\frac{a^2 + b}{a^2 - b}$

$a = 3, b = -1$

16) $(a + b)(c - d)$

$a = 1, b = -2, c = 3, d = -4$

17) $a^{33} - b^{44}$

$a = 0, b = -1$

18) $16x^3 - 18y^2$

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

19) $\frac{3}{5}x^2 + 0.5y^3$

$x = 10, y = -2$

20) $\frac{2a^3 - 3b^2 - 1}{6ab}$

$a = 2, b = -3$

21) $x^3 + 1$

$x = -0.2$

22) $x^4 - 16$

$x = -3$

23) $x^2 + 9$

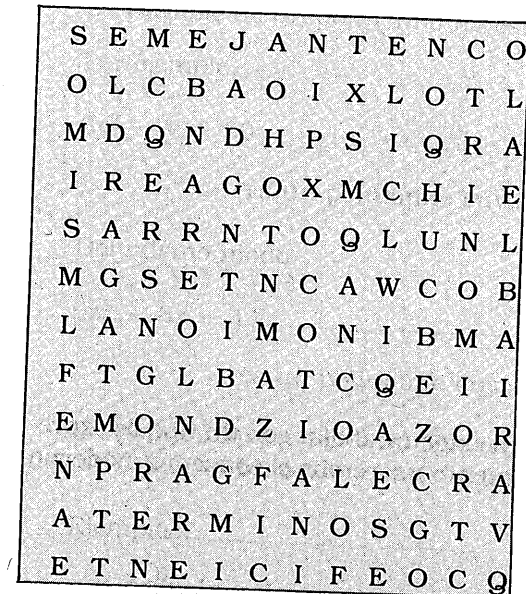
$x = -0.4$

24) $(x^2 - 1)^3$

$x = -1$

25) $(5x - 1)(2x + 3)$

$x = -2$



Busque en el diagrama las palabras anotadas a continuación.

Se leen hacia adelante, atrás, arriba, abajo y diagonalmente.

binomio
trinomio
polinomio
término
coeficiente
exponente
semejante
grado
variable

POLINOMIOS

8

POLINOMIOS

8.1 Ideas fundamentales

Muchos de los problemas en álgebra exigen trabajar con un tipo de expresión llamada **polinomio**. En todo momento usaremos el concepto moderno de polinomio.

Un **polinomio en la variable x** es una expresión algebraica formada solamente por la suma de términos de la forma ax^n , siendo a cualquier número y n un número entero no negativo.

Ejemplos:

- 1) $3x - 2$
- 2) $9x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 3$
- 3) $x^9 + 4$
- 4) 29
- 5) $2x^5 + x^3 + 8$

A continuación aparecen algunas expresiones que no son polinomios.

$$1) x^2 + 2x + \frac{15}{x^2} =$$

Esta expresión es una suma de términos pero no es un polinomio porque el último término, es decir $\frac{15}{x^2}$, no es de la forma ax^n . Al contrario, se trata de un número dividido por una potencia entera y positiva de x .

$$2) 2x^3 + 2x + 3\sqrt{x-6}$$

Esta expresión tampoco es un polinomio, ya que el tercer término no es una potencia entera de x .

La variable de un polinomio no está obligada a ser x necesariamente.

Por ejemplo,

$$3y^2 - y + 20$$

es un polinomio cuya variable es y .

Del mismo modo,

$$5z^3 + 8z - 11$$

es un polinomio cuya variable es z .

Un polinomio que tiene un solo término se llama un **monomio**. Si tiene dos se llama un **binomio** y si tiene tres se llama un **trinomio**.

Ejemplos:

Monomios	Binomios	Trinomios
$3x$	$x + 2$	$3x^2 + x - 9$
50	$8y - 4$	$3y^4 - y^2 + 8y$
$9y^4$	$n^2 - 3n$	$x^2 - 2x + 1$
$-n^9$	$z^3 - 1$	$n^2 + 3n + 2$

Los polinomios formados por más de tres términos no reciben ningún nombre en especial. Por ejemplo, $3x^4 + 8x^2 - x + 4$ es simplemente un polinomio de cuatro términos.

Un polinomio en las variables x y y es una expresión algebraica formada por la suma de términos de la forma ax^ny^m , siendo a cualquier número y n, m enteros no negativos.

Ejemplos:

- 1) $8xy^2$ (monomio)
- 2) $-5x^2y^2 + 8x^2y^5$ (binomio)
- 3) $4xy + 9xy^2 - 11xy^4$ (trinomio)
- 4) $2x^4y - 3x + 8y - 5$ (polinomio de cuatro términos)
donde $-3x = -3x^1y^0$; $8y = 8x^0y^1$; $-5 = -5x^0y^0$
- 5) $2u^3v - 3uv^2 + 6u - 17$ (polinomio de cuatro términos en las variables u y v)

Todo polinomio puede considerarse formado por una suma de monomios, o lo que es lo mismo, cada término de un polinomio es un monomio.

El coeficiente numérico de un término de un polinomio es el factor numérico del mismo. De ahora en adelante, al referirnos al coeficiente numérico le llamaremos coeficiente solamente.

Ejemplos:

Término	Coeficiente
1) 6xy	6
2) 9x³y	9
3) x⁵	1 (aunque no se escribe)
4) 3/4 n²	3/4
5) 3.2 a⁴b	3.2
6) -xy²	-1

A cada término de un polinomio se le asigna un **grado** que es igual a la suma de los exponentes de las variables que contiene.

Ejemplos:

Término	Grado
1) 8x	uno
2) 9xy 9xy = 9x¹y¹ (1 + 1 = 2)	dos
3) -5x³y	cuatro
4) 32 32 = 32x⁰	cero
5) 7r²st³	seis

El grado de un polinomio está determinado por el término de mayor grado.

Ejemplos: (En cada caso se ha subrayado el término que le da el grado al polinomio).

- 1) 5x² + x - 8 (segundo grado)
- 2) 9p²q² - 8pq⁴ + 1 (quinto grado)
(1 + 4 = 5)
- 3) 2x³yz + x²y²z² + xyz - 2y + 10 (sexto grado)
(2 + 2 + 2 = 6)
- 4) 58 (grado cero, porque 58 = 58x⁰)

Por lo general, los polinomios se ordenan escribiendo los exponentes en orden **descendente**, es decir, de mayor a menor. Si hay más de una variable, escogemos una de ellas para ordenar el polinomio. También podemos ordenarlo en orden **ascendente**, es decir, de menor a mayor.

Ejemplos:

- 1) 3x² - x + 8
- 2) 5x³y² + 2x²y³ + 4xy + 5 (ordenado en potencias descendentes de x)
- 3) 2x²y³ + 5x³y² + 4xy + 5 (ordenado en potencias descendentes de y)

Decimos que un polinomio está ordenado con respecto a una variable (letra) cuando sus términos se colocan de manera que los exponentes de esta variable aparezcan en orden ascendente o descendente.

Ejemplos:

- 1) 2x³ + x² + 4x - 5 es un polinomio ordenado en potencias descendentes de x.
- 2) 8 + 3y - y² + 5y³ + y⁵ es un polinomio ordenado en potencias ascendentes de y.
- 3) 2x³ + 5x²y - xy² + y³ es un polinomio ordenado con respecto a x en potencias descendentes. En este ejemplo, por casualidad, ha quedado ordenado en potencias ascendentes de y.

Hay polinomios que no son ordenables respecto a una determinada variable. Por ejemplo, 2x²y - x²z + 5x²y² no es ordenable respecto a **x**.

Dos términos son semejantes cuando ambos son numéricos o cuando tienen las mismas variables y sus exponentes son respectivamente iguales.

Ejemplos:

Semejantes

- 1) 8 y -11
- 2) -3x y 9x
- 3) 6ab² y -ab²

No semejantes

- 5cxy³ y 9cx³y
- 8abc² y 8ab²c
- 5xyz y 9xy

Si en una expresión aparecen términos semejantes, estos pueden reducirse a un solo término.

Evidentemente, si los términos semejantes son números, basta con hacer la suma algebraica de los mismos. Si aparecen variables, entonces efectuamos la suma algebraica de los coeficientes y repetimos las variables que aparecen con el mismo exponente, en virtud de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Ejemplos:

- 1) $8 + 3 - 4 = 7$
- 2) $5x + 9x = (5 + 9)x = 14x$
- 3) $3x^2 - x^2 + 4x^2 - 2x^2 = (3 - 1 + 4 - 2)x^2 = 4x^2$
- 4) $3ab^2 + ab^2 - 5ab^2 = (3 + 1 - 5)ab^2 = -ab^2$

Cuando la suma de los coeficientes numéricos resulta fácil, se efectúa mentalmente y se escribe el resultado directamente.

Ejemplos:

- 1) $9x - x + 5x + 2x = 15x$
- 2) $-3n^2 + 8n^2 - n^2 = 4n^2$

Si en un polinomio aparecen distintas clases de términos semejantes procedemos a agrupar los de cada clase y luego se reduce cada grupo. Esto se justifica mediante las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

Ejemplos:

$$1) 8x - 1 - 2x + 4 + 3x = \underbrace{(8x - 2x + 3x)}_{\substack{\text{se agrupan} \\ \text{las } x}} + \underbrace{(-1 + 4)}_{\substack{\text{se agrupan} \\ \text{las constantes}}} = 9x + 3$$

$$2) 2a^2c + 5b - 3a^2c + 11b + 9 = (2a^2c - 3a^2c) + (5b + 11b) + 9 = -a^2c + 16b + 9$$

Decimos que un polinomio está simplificado cuando no contiene términos semejantes.

Ejemplos:

- 1) $2x^3 - x + 8$
- 2) $3x^2 - y^2 + 5x - y + 1$
- 3) $3a^2b - 2ab + ab^2 + 14a - 19$

Ejercicio 8.1

Completar la siguiente tabla:

Polinomio	Grado	Número de términos
$x^3 - 3x^2 + 8x - 2$		
$y^4 + 1$		
38		
$25 - n^2$		
$11x^2y + x^2y^4 - x + 1$		
$x^5y^2 + y^6 - 3x + y$		

Simplificar

- 1) $3x^2 + x - 8 + x^2 - 4x + 1$
- 2) $5x^2 + 2x - 4x^2 - 2x + 3$

- 3) $y^2 - y + 2 + 3y$
- 4) $4n^3 - n^2 + n - 3 + n^2 + n$
- 5) $2z^3 + 5z + 7z^3 + 4z + z^2 - 1$
- 6) $3x^2y + 2x^2y^2 + xy^2 + 5x^2y - x^2y^2 + 8x - y + 3$
- 7) $3x^2y + 5xy + 2xy^2 - 3xy + 9y$
- 8) $2ab^2 + 3a^2 - 5ab + b^2 + 8ab + 4a^2$
- 9) $2pq - 3pq^3 + p^2 - pq + 4pq^3 + q^4$
- 10) $3x^2w + 2xw + 5xw^2 - 2xw + 9$

8.2 Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios es necesario sumar los términos semejantes. Como ya hemos estudiado la reducción de términos semejantes, prácticamente, ya sabemos cómo sumar polinomios.

Si quisiéramos sumar $4x^2 - 2x + 3$ y $5x^2 + 6x - 9$ tendríamos $(4x^2 - 2x + 3) + (5x^2 + 6x - 9)$.

Si eliminamos los paréntesis resulta

$$4x^2 - 2x + 3 + 5x^2 + 6x - 9$$

y al reducir los términos semejantes, tendremos

$$(4x^2 + 5x^2) + (-2x + 6x) + (3 - 9).$$

Finalmente, obtenemos

$$9x^2 + 4x - 6$$

Para sumar $3x^2 - x$ y $8x + 9$ procedemos de la misma forma.

$$\begin{aligned} (3x^2 - x) + (8x + 9) \\ 3x^2 + (-x + 8x) + 9 \\ 3x^2 + 7x + 9 \end{aligned}$$

En este caso, solamente había dos términos semejantes. Si queremos sumar más de dos polinomios procedemos de la misma forma. Por ejemplo, para hacer la siguiente suma:

$$(3x^2 - x + 1) + (x^2 + 9) + (5x^2 + 2x)$$

Agrupamos los términos semejantes.

$$(3x^2 + x^2 + 5x^2) + (-x + 2x) + (1 + 9)$$

Reducimos los términos semejantes y obtenemos $9x^2 + x + 10$.

Debemos recordar que la agrupación de términos puede hacerse mentalmente.

La suma también puede efectuarse en forma vertical, por ejemplo,

$(4x^2 - 2x + 3) + (5x^2 + 6x - 9)$ se puede expresar de la forma

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 2x + 3 \\ + 5x^2 + 6x - 9 \\ \hline 9x^2 - 4x - 6 \end{array}$$

Como habíamos visto anteriormente, la resta es la operación opuesta a la suma, de manera que para restar basta con cambiar de signo al sustraendo y luego proceder a sumar.

Para restar polinomios debemos proceder de la siguiente forma:

- 1) *Cambiar de signo al sustraendo. Esto quiere decir que tenemos que cambiar de signo a todos y cada uno de los términos del polinomio que va a restarse.*
- 2) *Reducir los términos semejantes.*
- 3) *Ordenar en forma descendente.*

Ejemplos:

$$1) (5x^3 + 3x^2 + x + 6) - (2x^3 - x^2 + 8x - 9)$$

Al cambiar de signo al segundo polinomio obtenemos

$$(5x^3 + 3x^2 + x + 6) + (-2x^3 + x^2 - 8x + 9).$$

Luego, procedemos a sumar

$$(5x^3 - 2x^3) + (3x^2 + x^2) + (x - 8x) + (6 + 9).$$

Finalmente, obtenemos

$$3x^3 + 4x^2 - 7x + 15$$

El uso de paréntesis al reducir los términos semejantes puede eliminarse como veremos en los próximos ejemplos.

$$2) (8x^2 + x - 9) - (x^2 - 4x + 2)$$

Cambiamos de signo

$$8x^2 + x - 9 - x^2 + 4x - 2.$$

Reducimos los términos semejantes y ordenamos

$$8x^2 - x^2 + x + 4x - 9 - 2.$$

Finalmente, obtenemos

$$7x^2 + 5x - 11.$$

$$\begin{aligned} 3) (x^2 - 8x + 4) - (x^2 - 10x + 5) \\ x^2 - 8x + 4 - x^2 + 10x - 5 \\ x^2 - x^2 - 8x + 10x + 4 - 5 \quad (x^2 - x^2 = 0) \\ 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) (4x^3 + 8x^2 - x + 1) - (x^3 + 8x^2 - x - 3) \\ 4x^3 + 8x^2 - x + 1 - x^3 - 8x^2 + x + 3 \\ 4x^3 - x^3 + 8x^2 - 8x^2 - x + x + 1 + 3 \\ \quad (8x^2 - 8x^2 = 0, -x + x = 0) \\ 3x^3 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (3x^5 + x^3 - x^2 + 1) - (x^4 + x - 3) \\ 3x^5 + x^3 - x^2 + 1 - x^4 - x + 3 \\ 3x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x + 1 + 3 \\ 3x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

Al igual que la suma de polinomios, la resta puede expresarse en forma vertical. Por ejemplo:

$$(5x^3 + 3x^2 + x - 6) - (2x^3 - x^2 + 8x + 9) =$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 3x^2 + x - 6 \\ - (2x^3 - x^2 + 8x + 9) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 3x^2 + x - 6 \\ - 2x^3 + x^2 - 8x - 9 \end{array}$$

$$3x^3 + 4x^2 - 7x - 15$$

Conviene hacer notar que el número de términos del polinomio obtenido al sumar o restar polinomios puede ser mayor, igual o menor que el número de términos de cada polinomio envuelto en la operación.

Ejemplos:

- 1) Al sumar $(3x^2 + 8) + (8x - 10)$, el resultado es $3x^2 + 8x - 2$. En este caso sumamos dos binomios y la suma resultó ser un trinomio.

- 2) Al restar $(3y^2 + 2y - 1) - (y^2 - 5y + 4)$, el resultado es $2y^2 + 7y - 5$. En este caso restamos dos trinomios y la diferencia resultó ser otro trinomio.

- 3) Por último, cuando restamos $(5n^3 + n^2 - n + 1) - (3n^3 + n^2 - n - 6)$ obtenemos $2n^3 + 7$. En este caso restamos dos polinomios de cuatro términos y obtuvimos un binomio.

Para sumar o restar polinomios que contengan más de una variable se procede de la misma forma, teniendo en cuenta que la respuesta debe aparecer ordenada respecto a una de las variables.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) (2x^2y + xy^2 - 3) + (y^3 + x^2y + xy^2 - 9) \\ 2x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + y^3 - 3 - 9 \\ 3x^2y + 2xy^2 + y^3 - 12 \end{aligned}$$

En este ejemplo el polinomio ha quedado ordenado respecto a la variable x .

$$\begin{aligned} 2) (8x^2 + y^2 + 3xy - x + 4) - (3x^2 - y^2 - 6xy + y - 1) \\ 8x^2 + y^2 + 3xy - x + 4 - 3x^2 + y^2 + 6xy - y + 1 \\ 8x^2 - 3x^2 + 3xy + 6xy - x + y^2 - y + 4 + 1 \\ 5x^2 + 9xy - x + y^2 - y + 5 \end{aligned}$$

También en este ejemplo la respuesta aparece ordenada respecto a la variable x .

Ejercicio 8.2

Efectuar la operación indicada.

- 1) $(3x + 8) + (4x - 9)$
- 2) $(6x^2 + x - 1) + (x^2 + 2x + 5)$
- 3) $(3n^2 - n + 1) + (n^2 + n + 8)$
- 4) $(u^3 + 2u^2 - 5u + 3) + (u^3 - 2u^2 + 5u + 6)$
- 5) $(3a^3 + 5a - 1) + (8a^2 + 9)$
- 6) $(3x^5 + x^3 + 1) + (x^4 + x^2 - 1)$
- 7) $(5x^2 + x + 9) + (18x^2 - x - 9)$

- 8) $\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{2}{5}x - 1\right) + \left(\frac{1x^2}{2} + \frac{3}{5}x - 3\right)$
- 9) $(8xy + x - 1) + (6xy + y + 3)$
- 10) $(3x^2 + xy - 5) + (6xy + 9)$
- 11) $(8x^2 + x - 1) - (x^2 + 6x - 3)$
- 12) $(8x + 2) - (3x - 5)$
- 13) $(3y^2 + y - 1) - (6y + 5)$
- 14) $(6u^2 + 4u - 1) - (2u^2 + 4u + 1)$
- 15) $(5x^2 - 8) - (2x^2 - 3x - 1)$
- 16) $(x^4 + x^2 + 3) - (x^3 + x - 5)$
- 17) $(y^2 + 6y - 4) - (3y^2 + 6y - 4)$
- 18) $\left(\frac{8x^2}{5} + \frac{2}{5}x + 3\right) - \left(\frac{3x^2}{5} - \frac{3}{5}x + 4\right)$
- 19) $(6xy + x - 1) - (2xy + y + 11)$
- 20) $(5x^2 + xy + 9) - (8xy + 3)$

3.3 Leyes de exponentes

Antes de estudiar la multiplicación y división de polinomios es necesario conocer los distintos tipos de exponentes y sus leyes.

Distintos tipos de exponentes

a) positivo

$$b^n = \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b \times b}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplos:

$$1) 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{tres veces}} \text{ que es igual a } 8$$

$$2) 3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{cuatro veces}} \text{ que es igual a } 81$$

b) negativo

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Ejemplos:

$$1) 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \text{ que es igual a } \frac{1}{8}$$

$$2) 3^{-4} = \frac{1}{3^4} \text{ que es igual a } \frac{1}{81}$$

c) cero

$$b^0 = 1 \quad (b \neq 0)$$

Ejemplos:

$$1) 2^0 = 1$$

$$2) (-3)^0 = 1$$

Leyes de exponentes

$$1) b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Cuando multiplicamos potencias que tienen la misma base, sumamos los exponentes.

$$2) \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

Cuando dividimos potencias que tienen la misma base, restamos los exponentes.

$$3) (b^m)^n = b^{mn}$$

Para hallar la potencia de una potencia, multiplicamos los exponentes.

En las leyes antes expuestas hemos considerado que m y n son números enteros positivos.

Como acabamos de ver, $b^3 = b \times b \times b$.

Esto también puede expresarse usando un punto en lugar del signo de multiplicación, es decir, $b^3 = b \cdot b \cdot b$, o simplemente, escribiendo $b^3 = bbb$, ya que cuando las letras aparecen sin ningún signo entre ellas se sobreentiende que se trata de una multiplicación.

Del mismo modo, cuando tenemos más de una letra, escribimos los factores uno a continuación del otro, por ejemplo, $a^3b^2 = aaabb$.

Si quisiéramos escribir ssssswww usando exponentes resultaría que $sssswww = s^5w^3$. Si tenemos algún factor numérico procedemos de la misma forma, por ejemplo, $3rrrrtt = 3r^4t^2$.

Aplicación de las leyes de exponentes

- 1) Si queremos multiplicar x^2 por x^5 tendremos que $x^2x^5 = x^7$ de acuerdo a la primera ley de exponentes.

$$\begin{aligned} x^2 &= xx \\ x^5 &= xxxxx \\ x^2x^5 &= \underbrace{(xx)(xxxxx)}_{\text{seven times}} \\ &= x^7 \end{aligned}$$

- 2) Si queremos dividir x^5 por x^2 tendremos que $\frac{x^5}{x^2} = x^3$ de acuerdo con la segunda ley de exponentes.

$$\begin{aligned} \frac{x^5}{x^2} &= \frac{\overbrace{xx}^{xx}xxx}{xx} \\ &= x^3 \end{aligned}$$

- 3) Si queremos elevar al cubo x^2 tendremos que $(x^2)^3 = x^6$ de acuerdo a la tercera ley de exponentes.

$$\begin{aligned} (x^2)^3 &= \underbrace{(x^2)(x^2)(x^2)}_{\text{three times}} \\ &= \underbrace{(xx)(xx)(xx)}_{\text{six times}} \\ &= x^6 \end{aligned}$$

$$4) \frac{x^2}{x^5} = x^{2-5}; x^{2-5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

En los ejemplos anteriores habíamos visto exponentes positivos solamente, sin embargo, en este ejemplo vemos que las leyes de exponentes también se aplican a exponentes negativos. Nótese que la respuesta final aparece sin exponente negativo. Si una expresión que contiene exponentes está en su forma más simple, los exponentes tienen que ser todos positivos.

Ejercicio 8.3

Escribir cada expresión usando exponentes.

- 1) xxxx
- 2) aaaaa
- 3) xxxxy
- 4) aaaaabb
- 5) 2xxyzzz
- 6) 5pppqrrrr
- 7) 3xxxx + 4yy
- 8) aab - 2abb
- 9) 3ccd + 2cdd
- 10) 9xx + 10xyyy

Simplificar.

- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| 11) $(-9)^2$ | 28) $2^3 + 2^2 + 2 + 2^0 + 2^{-1}$ |
| 12) -9^2 | 29) $2^{-3} - 3^{-2}$ |
| 13) $-(9)^2$ | 30) $a^2 a^4$ |
| 14) $(-2)^5$ | 31) $(a^2)^4$ |
| 15) $(-5)^2$ | 32) $(a^2a)^4$ |
| 16) -2^5 | 33) $(-x)^2 (x^3)$ |
| 17) -2^3 | 34) $-(-x)^3 (y^2)$ |
| 18) $-(-2)^3$ | 35) $(-x)^2 (-x)^3$ |
| 19) $(-2)^3$ | 36) $n^2 (-n^3)^2$ |
| 20) $-5(-3)^2$ | 37) $\frac{x^8}{x^2}$ |
| 21) $[(-5)(-2)]^2$ | 38) $\frac{x^9}{x^3}$ |
| 22) $(-3)(-2)^2$ | 39) $\frac{(y^2)^4}{y^3}$ |
| 23) $5^2 - 2^5$ | 40) $\frac{x^2x^6}{(x^4)^2}$ |
| 24) $5^2 - 5^{-2}$ | 41) $(a^3)^4(a)^3$ |
| 25) $10^2 + 10 + 10^0$ | |
| 26) $(3^{-2})^2$ | |
| 27) $3^4 (3^{-2})(3)^3$ | |

42) $3(a^2)^3a^4$

43) $x^4(x^2)^5$

44) $\frac{(y^2)^3}{(y^3)^2}$

45) $\frac{n^4n^5}{(n^3)^3}$

46) $(x^3x^4)^2$

47) $\frac{x^5(x^2)^3}{x^{10}}$

48) $\frac{a^5}{(a^2)^3}$

49) $\frac{(-n)^3}{(n^2)^2}$

50) $\frac{[(-x)^2x]^3}{(x^2)^3}$

51) $\frac{(-a)^8}{(a^2)^4}$

52) $\frac{(y^2)^5}{y^5y^6}$

53) $\frac{n^5}{n^2(-n)^3} + n^0$

54) $x^3(x^2)^0 + x^0(-x)^3 + y^0$

55) $(14x^{20}) \left(-\frac{1}{7}x^{-19} \right)$

8.4 Multiplicación de polinomios

Multiplicación de monomios

Al multiplicar dos monomios resulta otro monomio en el cual aparecen todos y cada uno de los factores de los monomios dados. El monomio así formado se llama producto de los monomios dados.

Ejemplo:

El producto de los monomios $5ab^2y - 4a^3b$ se expresa escribiendo $(5ab^2)(-4a^3b)$ ya que un paréntesis al lado de otro indica multiplicación. Ahora, en virtud de la propiedad conmutativa de la multiplicación escribimos el producto de la siguiente forma: $(5)(-4)aa^3b^2b$, pero $(5)(-4) = -20$; $aa^3 = a^4$ y $b^2b = b^3$, luego el producto se expresa finalmente como $-20a^4b^3$.

Por lo tanto, para multiplicar monomios procedemos de la siguiente forma:

- 1) Multiplicamos los coeficientes para conseguir el coeficiente del producto.
- 2) Cada variable llevará como exponente la suma de los exponentes con que aparece en cada factor, de acuerdo a las leyes estudiadas. $(b^m b^n = b^{m+n})$

Resumiendo, en multiplicación,

- 1) Los coeficientes se multiplican, considerando los signos.
- 2) Los exponentes de las potencias que tienen la misma base se suman.

Ejemplos:

1) $(-3ab^2c)(-4a^2b^2c^5) = 12a^3b^4c^6$

2) $(8ab)(-2xy) = -16abxy$

3) $(9a^2bx)(-acy) = -9a^3bcxy$

El procedimiento anterior puede aplicarse también en el caso en que haya más de dos factores.

Ejemplos:

1) $(3a)(-4ab)(2bc^2) = -24a^2b^2c^2$

2) $(-2x^2y)(3yz)(-8xz) = 48x^3y^2z^2$

3) $(6n)(5p)(-n^2q) = -30n^3pq$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio basta con aplicar la propiedad distributiva, multiplicando el monomio dado por todos y cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplos:

1) $a(x + y) = ax + ay$

2) $2n(3p - 2q + r) = 6np - 4nq + 2nr$

3) $(-3x)(2x + y - z) = -6x^2 - 3xy + 3xz$

4) $(5ab^2)(2a - 3b + c) = 10a^2b^2 - 15ab^3 + 5ab^2c$

A veces, es preferible colocar los polinomios de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 5x - 8 \\ \times \quad \quad \quad 3x \\ \hline 3x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 24x \end{array}$$

Multiplicación de un polinomio por otro polinomio

Para multiplicar dos polinomios aplicaremos la propiedad distributiva varias veces. El resultado es un nuevo polinomio, en el cual sus términos se

obtienen multiplicando cada término del primer polinomio por los términos del segundo.

Ejemplos:

$$(a + b)(x + 2y - 3z)$$

Aplicando la propiedad distributiva obtenemos

$$(a + b)(x) + (a + b)(2y) + (a + b)(-3z)$$

y aplicando nuevamente la propiedad distributiva resulta

$$ax + bx + 2ay + 2by - 3az - 3bz.$$

Al multiplicar polinomios entre sí sucede frecuentemente que en el producto aparecen términos semejantes. Por esta razón, resulta conveniente colocar los polinomios en la forma que veremos en los ejemplos siguientes:

Ejemplos:

$$1) (x^2 + 5x - 2)(3x + 4)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 2 \\ \times \quad 3x + 4 \\ \hline 3x^3 + 15x^2 - 6x \\ \quad 4x^2 + 20x - 8 \\ \hline 3x^3 + 19x^2 + 14x - 8 \end{array}$$

Para usar la forma vertical se coloca el polinomio de más términos primero y debajo el otro polinomio. Se multiplica $3x$ por cada término de $x^2 + 5x - 2$, luego se multiplica 4 por cada término de $x^2 + 5x - 2$. Combinando los términos semejantes en columna obtenemos el resultado final.

Este método tiene la ventaja de que al colocar los términos semejantes en columnas, el producto aparece ya simplificado.

$$2) (5 - 2x + x^4 + x^2)(x^2 + 8 - 3x)$$

Antes de efectuar la multiplicación es conveniente ordenar los polinomios en potencias ascendentes o descendentes de la variable. En este caso, los ordenaremos en potencias descendentes.

$$(x^4 + x^2 - 2x + 5)(x^2 - 3x + 8)$$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^2 - 2x + 5 \\ \times \quad x^2 - 3x + 8 \\ \hline x^6 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 \\ - 3x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 15x \\ \quad 8x^4 + 8x^2 - 16x + 40 \\ \hline x^6 - 3x^5 + 9x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 31x + 40 \end{array}$$

Nótese que en la primera línea se dejó un espacio para la quinta potencia; en la segunda línea no aparece ningún término con exponente 4 y en la tercera línea no aparece ningún término con exponente 3.

Ejercicio 8.4

Hallar los siguientes productos.

$$1) (3y)(-4y^2)$$

$$2) (6ab)(-2a^2b^3)$$

$$3) (-3ab)(-4bc^2)$$

$$4) (7xy)(9x^2yz^2)$$

$$5) (-2x^2yz)(-5xyz^3)$$

$$6) (5ab)(6a^2cd^2)$$

$$7) (4.5ab)(-2a^2b^3)$$

$$8) \left(\frac{3}{4}xy^2\right)(8x^2)$$

$$9) (3a)(-2b)(9a)$$

$$10) (5ab)(-2bc)(-3ac^2)$$

$$11) (2a^{n+1})(-8a^{2n-1})$$

$$12) (3y^k)(-5y^{2-k})(-2y)$$

$$13) x(x - y + z)$$

$$14) a(a + 2b + 3c)$$

$$15) (-3n)(n^2 + n - 1)$$

$$16) (3ab)(a^5 + ab^2 - b^3)$$

$$17) 2x^2(x^2 - x + 1)$$

$$18) -x(x^5 - x^3 + x)$$

$$19) 3xy^2(xy + yz + xz)$$

$$20) 2ab(3ax - 4by + 5cz)$$

$$21) \frac{3}{5}xy(10xy^2 - 15x^2y + 20xy)$$

$$22) 3.5ab^2(2ab - 4a + 8)$$

$$23) x(x^{n+1} - x^n + x^{1-n})$$

$$24) y^{2n}(3y^n + 5y^{1-n} - 2y)$$

$$25) (x + 5)(x + 4)$$

$$26) (y - 3)(y - 2)$$

$$27) (a + 5)(a - 5)$$

- 28) $(x - 3)(x + 1)$
- 29) $(2x + 1)(2x - 1)$
- 30) $(5x + 2)(2x - 5)$
- 31) $(2y + 1)(y - 4)$
- 32) $(3x + 4)(3x + 4)$
- 33) $(3x + 4y)(5x - 6y)$
- 34) $(x + 1)(x^2 + 3x + 4)$
- 35) $(2x + 1)(x^2 - x + 5)$
- 36) $(3a - 2)(a^3 - a^2 + a - 1)$
- 37) $(y + 2)(y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 4y + 5)$
- 38) $(a + b)(p - q + r)$
- 39) $(x^2 + 1 - x)(x^2 + x - x^3 + 1)$
- 40) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
- 41) $(a + 1)(a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + 1)$
- 42) $(y + 1)(y^4 - 2y^3 + y^6)$
- 43) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b\right)(2a^3 - 16a + 8)$
- 44) $(2.5x + 0.5)(4x^2 - 8x + 20)$

8.5 División de polinomios

División de monomios

Dividir un monomio por otro es hallar un tercer monomio tal que al multiplicarlo por el segundo, el producto sea igual al primero.

Ejemplo:

La división de $12a^2b^3$ por $4a$ la expresamos como $(12a^2b^3) \div (4a)$, o bien, $\frac{12a^2b^3}{4a}$ que es lo más acostumbrado.

Llamamos **dividendo** al monomio que se divide, es decir, $12a^2b^3$, y **divisor** al monomio por el cual se divide, es decir, $4a$. El monomio resultante se llama **cociente**.

En este ejemplo, el cociente es $3ab^3$ ya que $(3ab^3)(4a) = 12a^2b^3$.

Por tanto, para hallar el cociente de dos monomios se procede de la siguiente forma:

- 1) Dividimos los coeficientes para obtener el coeficiente del cociente, considerando los signos.
- 2) Cada variable del dividendo o del divisor aparecerá también en el cociente, con un exponente igual a la diferencia entre los exponentes con que aparece en el dividendo y en el divisor. Cuando una variable no aparece en el dividendo o en el divisor podemos suponer que tiene exponente cero ya que cualquier variable con exponente cero es igual a uno.

Resumiendo, en división,

- 1) Los coeficientes se dividen, considerando los signos.
- 2) Los exponentes de las potencias que tienen la misma base se restan.

Ejemplos:

$$1) \frac{18a^3b^2}{-6a^2} = \frac{18}{-6} a^{3-2}b^{2-0} \\ = -3ab^2$$

Generalmente, el paso intermedio se omite, como veremos en los próximos ejemplos.

$$2) \frac{32a^2b}{8ab} = 4a$$

$$3) \frac{-9x^2y}{3x} = -3xy$$

$$4) \frac{-48x^2y^3z^4}{-16xyz} = 3xy^2z^3$$

$$5) \frac{10a^{3n}b^{n+4}}{5a^{2n}b^{1-n}} = 2a^n b^{2n+3}$$

División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio por un monomio dividimos cada término del polinomio dado por el monomio y formamos así el cociente.

Ejemplos:

$$1) \frac{x^3 + 2xy}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{2xy}{x} \text{ que es igual a } x^2 + 2y$$

$$2) \frac{8x^3 - 10x^2 + 2x}{2x} = 4x^2 - 5x + 1$$

$$3) \frac{6ab^3 + 9a^2b - 15ab^4}{3ab} = 2b^2 + 3a - 5b^3$$

División de un polinomio por un binomio

Para dividir un polinomio por un binomio usamos un proceso de división larga semejante al usado en aritmética para dividir enteros.

Con el propósito de aclarar el proceso presentamos a continuación varios ejemplos resueltos paso a paso.

Ejemplos:

$$1) (x^2 - 8x + 15) \div (x - 3) \\ \text{que también puede expresarse como} \\ \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3}$$

a) Nos aseguramos de que los polinomios estén ordenados en forma descendente. En este ejemplo ya lo están.

b) Colocamos los polinomios para efectuar la división larga.

$$x - 3 \overline{) x^2 - 8x + 15}$$

c) Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, esto es, $x^2 \div x = x$. Este será el primer término del cociente.

$$x - 3 \overline{) x^2 - 8x + 15} \quad \begin{array}{r} x \end{array}$$

d) Multiplicamos x por el divisor, lo restamos del dividendo y luego consideramos el próximo término del dividendo.

$$x - 3 \overline{) x^2 - 8x + 15} \quad \begin{array}{r} x \\ -x^2 + 3x \\ \hline -5x + 15 \end{array}$$

e) Dividimos el primer término de la diferencia por el primer término del divisor, esto es, $(-5x) \div x = -5$. Este será el segundo término del cociente.

$$x - 3 \overline{) x^2 - 8x + 15} \quad \begin{array}{r} x - 5 \\ x^2 - 8x + 15 \\ -x^2 + 3x \\ \hline -5x + 15 \end{array}$$

f) Multiplicamos (-5) por el divisor y lo restamos de $(-5x + 15)$

$$x - 3 \overline{) x^2 - 8x + 15} \quad \begin{array}{r} x - 5 \\ x^2 - 8x + 15 \\ -x^2 + 3x \\ \hline -5x + 15 \\ 5x - 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

g) Aquí termina el proceso, resultando el cociente que llamaremos Q . = $x - 5$ y el residuo que llamaremos $R = 0$.

$$2) (x^2 + 9x + 14) \div (x - 5)$$

$$x - 5 \overline{) x^2 + 9x + 14}$$

Siguiendo los pasos del ejemplo anterior, llegamos al resultado final.

$$x - 5 \overline{) x^2 + 9x + 14} \quad \begin{array}{r} x \end{array}$$

$$x - 5 \overline{) x^2 + 9x + 14} \quad \begin{array}{r} x \\ x^2 + 9x + 14 \\ -x^2 + 5x \\ \hline 14x + 14 \end{array}$$

$$x - 5 \overline{) x^2 + 9x + 14} \quad \begin{array}{r} x + 14 \\ x^2 + 9x + 14 \\ -x^2 + 5x \\ \hline 14x + 14 \\ -14x + 70 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\text{cociente: } Q = x + 14$$

$$\text{residuo: } R = 84$$

$$3) (x^3 - 8) \div (x + 2)$$

$$x + 2 \overline{) x^3 - 8}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x + 2 \overline{) x^3 + 0x^2 + 0x - 8} \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ -2x^2 + 0x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x \\ x + 2 \overline{) x^3 + 0x^2 + 0x - 8} \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ -2x^2 + 0x \\ \underline{2x^2 + 4x} \\ 4x - 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 4 \\ x + 2 \overline{) x^3 + 0x^2 + 0x - 8} \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ -2x^2 + 0x \\ \underline{2x^2 + 4x} \\ 4x - 8 \\ \underline{-4x - 8} \\ -16 \end{array}$$

$$\text{cociente: } Q = x^2 - 2x + 4$$

$$\text{residuo: } R = -16$$

Ejercicio 8.5

Efectuar las divisiones indicadas.

$$1) \frac{8x^9}{4x^3}$$

$$2) \frac{9y^6}{3y^2}$$

$$3) \frac{-4x^4y^2}{2xy}$$

$$4) \frac{3a^2bc^3}{-a^2bc}$$

$$5) \frac{30cxy}{-5x}$$

$$6) \frac{40x^{18}y^6}{8x^9y^3}$$

En este ejemplo, el polinomio no contiene términos con exponente 2 y 1, por lo tanto, fue necesario añadir ceros para efectuar la división.

$$7) \frac{42m^2p}{-6mp}$$

$$8) \frac{-66r^2s^3t^5}{-22rs^2t^3}$$

$$9) \frac{9abc}{0.5ac}$$

$$10) \frac{6a^2b^k}{-2ab^{k-1}}$$

$$11) \frac{18xy}{3x^{1-n}y}$$

$$12) \frac{-54x^ky^{2k}}{-18x^{k-1}y^{k-3}}$$

$$13) \frac{x^2 + 5xy}{x}$$

$$14) \frac{8a^5 - 4a^7}{2a^3}$$

$$15) \frac{6y^3 - 24ay^2}{6y^2}$$

$$16) \frac{x^3 + 3x^2 - 8x}{x}$$

$$17) \frac{x^6 - x^4 + x^2}{x^2}$$

$$18) \frac{x^2y^2z - xy^2z^2 + x^2yz^2}{xyz}$$

$$19) \frac{a^9 - a^6 + a^3}{a^3}$$

$$20) \frac{2x^4 + 9x^2 - 5x}{0.5x}$$

$$21) \frac{3x^k + 12x^{k+2} - 9x^{k+3}}{3x^k}$$

$$22) \frac{y^{k+1} - 6y^{2-k} - y^4}{y^k}$$

$$23) (x^2 - 8x + 12) \div (x - 2)$$

$$24) (x^2 + 2x - 35) \div (x + 7)$$

$$25) (x^2 + 8x + 1) \div (x + 1)$$

$$26) (y^2 + 9y + 3) \div (y + 2)$$

$$27) (6x^2 + 13x + 6) \div (2x + 3)$$

$$28) (5x^2 - 13x + 6) \div (5x + 2)$$

$$29) (8x^2 + 10x + 5) \div (2x + 1)$$

$$30) (36x^2 - 49) \div (6x + 7)$$

$$31) (8y^3 - 1) \div (2y - 1)$$

$$32) (x^5 + 1) \div (x - 1)$$

$$33) (x^6 - 64) \div (x - 2)$$

$$34) (n^5 - 243) \div (n + 3)$$

8.6 Repaso

Simplificar.

$$1) 5x^2 + 3x - x^2 - 3x + 4$$

$$2) 8y^4 - 5y^2 + 3y^3 + 5y^2 - y - 1 - 4y^3$$

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

$$3) (5x^2 + x - 2) + (4x^3 - x + 5)$$

$$4) (8ab + a - 3) - (7ab - a + 3)$$

$$5) \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 1 \right) + \left(\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \right)$$

$$6) (3.5a^2b^3c)(4ab^2c)$$

$$7) (2x^{c-1})(-5x^{2c+1})$$

$$8) 2.5xy^2(6x - 4y + 8)$$

$$9) x^{3n}(2x^n + 9x^{1-2n} - 2x)$$

$$10) (5n + 3)(4n - 1)$$

$$11) (3a + 1)(a^2 - a + 8)$$

$$12) (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

$$13) \frac{-36a^2bc^4}{-44ac^3}$$

$$14) \frac{28x^5 - 20x^9}{4x^4}$$

$$15) (343n^3 - 8) \div (7n - 2)$$

8.7 Prueba acumulativa

Seleccionar la contestación correcta.

$$1) \text{ ¿Cuántos términos hay en la expresión } 8(x^2y(x-1)) + 3?$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 8

$$2) \text{ En la expresión } 3x^4 - x^2 + 9x - 1, \text{ el coeficiente del segundo término es}$$

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2

$$3) \text{ Si } a = -1 \text{ y } b = 2, \text{ entonces } a^3 - b^3 =$$

- A) -9 B) -7 C) 7 D) 9

$$4) \text{ Si } x = \frac{1}{2} \text{ entonces } 16x^3 - 12x^2 + 2x - 4 =$$

- A) -4 B) -3 C) 2 D) 6

$$5) \text{ El grado del polinomio } x^5 + 8x^4y^2 + 6x^3y^2 - 8xy + 6y + 3x - 1 \text{ es}$$

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 1

- 6) $(3x - 8) + (x^2 - 5x) =$
 A) $x^2 - 2x - 8$ B) $x^2 - 8x - 8$
 C) $x^2 + 8x - 8$ D) $x^2 + 2x - 8$
- 7) $(2y^2 + 9) - (8 - y^2) =$
 A) $3y^2 + 1$ B) $3y^2 + 17$ C) $y^2 + 1$ D) $y^2 + 17$
- 8) $(3n^2 + 4n - 3) - (4n - 2n^2 + 2) =$
 A) $n^2 - 5$ B) $n^2 - 1$ C) $5n^2 - 5$ D) $5n^2 - 1$
- 9) $(-3)^3 + (-2)^2 + (-1)^0 =$
 A) -31 B) -24 C) -23 D) -22
- 10) $(-2)^4 + (-3)^2 - (5)^2 =$
 A) -50 B) -18 C) 0 D) 50
- 11) $4 + 4^0 + 4^{-1} =$
 A) 0 B) 1 C) 4.25 D) 5.25
- 12) $(3x^2y)(-4x^3y^4) =$
 A) $-12x^5y^5$ B) $-12x^6y^4$ C) $12x^5y^5$ D) $12x^6y^4$
- 13) $\left(\frac{3}{4}a^2b\right)\left(\frac{1}{4}ab^2\right) =$
 A) $3a^3b^3$ B) $3a^2b^2$ C) $\frac{3a^3b^3}{16}$ D) $\frac{3a^2b^2}{16}$
- 14) $5x(9 - x^2) =$
 A) $45x - 5x^3$ B) $45x - 5x^2$ C) $14x - 5x^3$ D) $14x - 5x^2$
- 15) $(2x + 3)(3x - 2) =$
 A) $6x^2 + 5x + 6$ B) $6x^2 + 5x - 6$
 C) $6x^2 - 5x + 6$ D) $6x^2 - 5x - 6$
- 16) $\left(\frac{x}{2} + 3\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right) =$

- A) $\frac{x^2}{4} - 9$ B) $\frac{x^2}{4} - 6$ C) $\frac{x^2}{2} - 9$ D) $\frac{x^2}{2} - 6$
- 17) $\frac{28x^9}{-4x^3} =$
 A) $-24x^3$ B) $-24x^6$ C) $-7x^3$ D) $-7x^6$
- 18) $(x^2 + x - 20) \div (x - 4) =$
 A) $x - 5$ B) $x + 5$ C) $2x - 5$ D) $2x + 5$
- 19) $(a^3 - 64) \div (a - 4) =$
 A) $a^2 + 4a + 16$ B) $a^2 - 4a + 16$
 C) $a^2 - 4a - 16$ D) $a^2 + 4a - 16$
- 20) $(6n^2 - n - 15) \div (3n - 5) =$
 A) $2n - 3$ B) $2n + 3$ C) $2n - 10$ D) $2n + 10$
- 21) Si $a = 0.2$ y $b = 3$, entonces $a^3 - b^3 =$
 A) -26.992 B) -26.2 C) 26.2 D) 26.992
- 22) Si $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{3}$, entonces $q^2 - p^2 =$
 A) $\frac{5}{36}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $-\frac{5}{36}$ D) $-\frac{1}{5}$
- 23) $(n^5 - 1) \div (n - 1) =$
 A) $n^4 + 1$ B) $n^4 - 1$
 C) $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ D) $n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$
- 24) $(8x^3 + 27) \div (2x + 3) =$
 A) $6x^2 + 9$ B) $4x^2 + 9$
 C) $4x^2 + 6x + 9$ D) $4x^2 - 6x + 9$
- 25) $(y^3 - 0.008) \div (y - 0.2) =$
 A) $y^2 - 0.004$ B) $y^2 + 0.004$
 C) $y^2 + 0.2y + 0.04$ D) $y^2 - 0.2y + 0.04$