

DESTREZAS BASICAS DE MATEMATICAS

Quinta edición

FRANCISCO A. LEAL
MARGARITA NOLASCO
NILSA TORO
ROSA E. GONZALEZ

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN
SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAN • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

DESTREZAS BÁSICAS DE MATEMÁTICAS
Quinta edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1992, respecto a la quinta edición por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA, S.A.
Transversal 42B No. 19-77,
Santafé de Bogotá, Colombia

DERECHOS RESERVADOS © 1992, respecto a la quinta edición por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MÉXICO, S.A. de C.V.
Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 958-600-082-6

4567890123 P.E.-92 9087543216

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Agosto de 1996 en
Impresora y Maquiladora de
Libros MIG, S.A. de C.V.
Venados Núm. 530
Col. Los Olivos
Delegación Tláhuac
13210 México, D.F.

Se tiraron 3700 ejemplares

CONTENIDO

CAPITULO 1
NUMEROS NATURALES

1.1	Introducción	2
1.2	Reglas de divisibilidad	2
1.3	Exponentes	5
1.4	Números primos y compuestos	7
1.5	Factorización prima	10
1.6	Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	11
1.7	Orden de las operaciones	15
1.8	Repaso	17

CAPITULO 2
NUMEROS ENTEROS

2.1	Recta numérica	20
2.2	Suma	23
2.3	Resta	28
2.4	Multiplicación	30
2.5	División	32
2.6	Orden de las operaciones	33
2.7	Repaso	35
2.8	Prueba acumulativa	38

CAPITULO 3
FRACCIONES

3.1	Definición	42
3.2	Representación de una fracción	43
3.3	Clasificación de fracciones	45

3.4 Simplificación de fracciones	47
3.5 Comparación de fracciones	50
3.6 Repaso	53

CAPITULO 4
OPERACIONES CON FRACCIONES

4.1 Suma y resta de fracciones	58
4.2 Suma y resta de números mixtos	65
4.3 Multiplicación y división de fracciones	68
4.4 Multiplicación y división de números mixtos	72
4.5 Fracciones positivas y negativas	75
4.6 Repaso	79
4.7 Prueba acumulativa	81

CAPITULO 5
DECIMALES

5.1 Introducción	88
5.2 Redondeo	91
5.3 Suma y resta	94
5.4 Multiplicación	97
5.5 División	99
5.6 Fracciones y decimales	104
5.7 Decimales positivos y negativos	107
5.8 Repaso	108

CAPITULO 6
RAZONES Y PROPORCIONES

6.1 Razones	114
6.2 Proporciones	117
6.3 Aplicaciones a la resolución de problemas	119
6.4 Por ciento	124
6.5 Resolución de problemas	128
6.6 Repaso	135
6.7 Prueba acumulativa	136

CAPITULO 7
ALGEBRA

7.1 Conceptos básicos	144
7.2 Evaluación de expresiones algebraicas	147
7.3 Repaso	149

CAPITULO 8
POLINOMIOS

8.1 Ideas fundamentales	152
8.2 Suma y resta de polinomios	158
8.3 Leyes de exponentes	162
8.4 Multiplicación de polinomios	166
8.5 División de polinomios	170
8.6 Repaso	176
8.7 Prueba acumulativa	177

CAPITULO 9
ECUACIONES

9.1 Introducción	182
9.2 Resolución de ecuaciones que requieren una sola operación	185
9.3 Resolución de ecuaciones que requieren más de una operación	187
9.4 Expresiones verbales	192
9.5 Problemas de aplicación	193
9.6 Repaso	199

CAPITULO 10
GEOMETRIA

10.1 Conceptos básicos	202
10.2 Perímetro y área	202
10.3 Problemas de aplicación	205
10.4 Repaso	211
10.5 Prueba acumulativa	212

APENDICES

A. Problemas con números naturales	219
B. Propiedades de las operaciones	223
C. Sistema métrico	226
Respuestas	228
Índice alfabético	261

San Juan, 13/11/89

Querido primo:

Sólomente 2 líneas para decirte que llego el próximo día 29 del presente mes. El avión sale a las 3 de la tarde y llega aproximadamente a las 7 de la noche. Espero que vayas a recogerme en la camioneta, porque llevo 5 maletas grandes, y la más pequeña pesa 67 libras. La última vez que te visité tuve que pagar \$17 por exceso de equipaje. Esta vez tuve suerte, porque me toca un asiento en la fila 19, que está en el área de no fumar. Para que no te confundas, quiero que sepas que voy en el vuelo 83 que hace una escala de 47 minutos en la ciudad de Bellavista. Estaremos contigo 41 días porque sólomente tengo 43 días de vacaciones.

Decidimos hacer el viaje porque en la agencia de pasajes nos hicieron una oferta estupenda, sólomente dimos un anticipo de \$79 y el resto lo pagaremos en cómodas mensualidades de \$59 cada una.

Cuando veas a mi esposa no la vas a reconocer; ha rebajado 31 libras en sólomente 73 días. Ahora mide 23" de cintura y antes medía 37". Mi hijo mayor irá con nosotros; está grandísimo, ya mide 61", parece que va a ser jugador de baloncesto.

Te extrañará que te haya escrito. No te llamé por teléfono porque la cuenta del mes pasado fue de \$97, sin contar la del agua que fue de \$53 y la luz subió a \$71. Decididamente, hay que economizar. Saludos al resto de la familia. Recibe un abrazo de tu primo que no te olvida.

Juan

P.D. Cuántos números primos aparecen en la carta? Por favor, escríbelos en orden ascendente.

NUMEROS

NATURALES

1

Un número es divisible por otro si al dividir el primero por el segundo, el cociente es un número natural y el residuo es cero.

Ejemplos:

- 1) El número natural 8 es divisible por 4, ya que al dividir 8 por 4 el cociente es 2 y el residuo es cero.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ cociente} \\ 4 \overline{) 8} \\ \underline{8} \\ 0 \text{ residuo} \end{array}$$

- 2) El número natural 9 no es divisible por 5. Veamos:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{) 9} \\ \underline{5} \\ 4 \end{array}$$

El residuo es diferente de cero.

Un factor o divisor de un número es un número natural que al multiplicarlo por otro produce el número dado, al cual se le llama producto.

Ejemplo:

$$\underbrace{3 \times 4}_{\text{factores}} = \underbrace{12}_{\text{producto}}$$

Un número es múltiplo de otro si se puede expresar como el producto del número dado por un número natural.

Por ejemplo, 6 es múltiplo de 3 porque $6 = 3 \times 2$. Si queremos hallar otros múltiplos de 3, multiplicamos el 3 por los números naturales obteniendo 3, 6, 9, 12,...

A continuación presentamos varias reglas de divisibilidad que resultarán de gran utilidad.

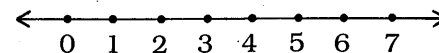
1 NUMEROS NATURALES

1.1 Introducción

Los **números naturales** son los que utilizamos para contar, éstos son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... Los puntos suspensivos (...) indican que los números continúan en esa forma, sin terminar nunca.

Si sumamos dos números naturales obtenemos otro número natural. Por ejemplo, $9 + 2 = 11$. Sin embargo, si restamos dos números naturales iguales, como por ejemplo $7 - 7$, necesitamos un nuevo número para representar el resultado. Ese número es el cero. Si se incluye el cero con los números naturales, resulta un conjunto de números conocido como los **números cardinales**. Luego, los números cardinales son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Los números cardinales pueden representarse en un diagrama, como se ilustra a continuación. Para esto, localizamos dos puntos convenientes cualesquiera, identificamos el punto de la izquierda como cero y el punto de la derecha como uno. Luego, utilizamos la distancia desde cero hasta uno, como una unidad de medida para marcar distancias iguales hacia la derecha, designando cada punto marcado con el próximo número natural.



En el pasado aprendimos a efectuar operaciones básicas con los números naturales, éstas son: suma, resta, multiplicación y división.

1.2 Reglas de divisibilidad

Cuando estudiamos los números naturales resulta muy útil saber si un número es **divisible** por otro. En esta sección aprenderemos las técnicas para determinar, sin efectuar la división, si un número es divisible por otro.

Divisibilidad por 2:

Un número es divisible por 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8.

Ejemplos:

- 1) 38, 170 y 1,356 son divisibles por 2, porque terminan en 8, 0 y 6, respectivamente.
- 2) 361 no es divisible por 2, porque termina en 1.

Los números divisibles por 2 se llaman **números pares**. Los números que no son divisibles por 2 se llaman **números impares**.

Divisibilidad por 3:

Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Ejemplos:

- 1) 18 es divisible por 3, ya que
 $1 + 8 = 9$
 $\downarrow$
 9 es múltiplo de 3
- 2) 24 es divisible por 3, ya que
 $2 + 4 = 6$
 $\downarrow$
 6 es múltiplo de 3
- 3) 187 no es divisible por 3, la suma de sus dígitos
 $1 + 8 + 7 = 16$
 $\downarrow$
 16 no es múltiplo de 3
- 4) 1,146 es divisible por 3, la suma de sus dígitos
 $1 + 1 + 4 + 6 = 12$
 $\downarrow$
 12 es múltiplo de 3

Divisibilidad por 5:

Un número es divisible por 5, si termina en 0 ó 5.

Ejemplos:

- 1) 15 y 1,450 son divisibles por 5 porque terminan en 5 y 0 respectivamente.
- 2) 5,063 no es divisible por 5 porque termina en 3.

Ejercicio 1.2

Indicar si los siguientes enunciados son ciertos o falsos. Justificar las respuestas.

- 1) Un número es divisible por otro si en el proceso de división el cociente es un número cardinal y el residuo es cero.
- 2) Los números divisibles por 2 se llaman números impares.
- 3) El número 73 es divisible por 3.
- 4) Un número que es divisible por 10 siempre es divisible por 5.

Utilizar las reglas de divisibilidad para determinar si los siguientes números son divisibles por 2, 3 ó 5.

- | | | | |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 5) 132 | 8) 582 | 11) 1,407 | 14) 8,469 |
| 6) 215 | 9) 600 | 12) 3,824 | |
| 7) 416 | 10) 1,233 | 13) 4,005 | |

Al número 6,20? le falta un dígito. Sustituir el signo de interrogación, de manera que el número sea divisible por los siguientes números:

- 15) 2
- 16) 3
- 17) 5
- 18) 2 y 3
- 19) 2, 3 y 5

1.3 Exponentes

El concepto de **exponente** es de gran utilidad para expresar números en una forma más corta. Por ejemplo, el producto $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ se expresa como 2^5 y se lee "dos a la cinco". La expresión $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ está en la forma expandida. La notación 2^5 es una expresión exponencial, donde al número 2 se le llama la **base** y al número 5 se le llama **exponente**.

El exponente se usa como una forma de abreviar una multiplicación. El exponente indica el número de veces que aparece multiplicada la base. En el ejemplo anterior, el 5 indica que la base, que es 2, aparece multiplicada por sí misma cinco veces. Luego, el valor de la expresión $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ es igual a 32. Decimos que 32 es la quinta **potencia** de 2.

La expresión b^n significa que **b** aparece multiplicada **n** veces. **b** se conoce como la base y **n** como el exponente. Se llama potencia al valor que se obtiene al multiplicar la base **n** veces.

Ejemplos:

$$1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{base}}}{7}^2 \xrightarrow{\text{exponente}} = \underbrace{7 \times 7}_{\text{forma expandida}} \text{ que es igual a } \underbrace{49}_{\text{potencia}}$$

$$2) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{base}}}{3}^4 \xrightarrow{\text{exponente}} = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{forma expandida}} \text{ que es igual a } \underbrace{81}_{\text{potencia}}$$

3)

a) $5 \times 5 \times 5 = 5^3$, 5 aparece multiplicado 3 veces.

b) $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^2 \times 2^3$, 3 aparece multiplicado 2 veces y 2 aparece multiplicado 3 veces.

c) $9 \times 9 \times 5 \times 6 \times 6 \times 6 = 9^2 \times 5 \times 6^3$, 9 aparece multiplicado 2 veces, 5 aparece multiplicado 1 vez y 6 aparece multiplicado 3 veces.

Para toda base b , $b^1 = b$. Esto es, que cualquier número elevado a la uno es el mismo número.

Ejemplo:

$$3^1 = 3; 17^1 = 17; 253^1 = 253$$

Cualquier número diferente de cero, elevado a la cero es igual a uno. Esto es, para toda base b , $b \neq 0$, $b^0 = 1$.

Ejemplos:

$$3^0 = 1; (24)^0 = 1; 0^0 \text{ no está definido}$$

Ejercicio 1.3

Escribir cada expresión en forma expandida.

1) 7^3

2) 4^6

3) 10^5

4) 13^4

Escribir cada expresión en la forma exponencial.

5) $6 \times 6 \times 6 \times 6$

6) $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

7) $9 \times 4 \times 4 \times 4$

8) $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$

Hallar el valor de cada expresión.

9) $2^2 \times 3^3$

10) $2^3 \times 5^2$

11) $6^2 \times 3$

12) $2^3 \times 1^3 \times 3^2$

13) $3^3 \times 4^0 \times 10^2$

14) $5 \times 3^2 \times 4^2 \times 7^0$

1.4 Números primos y compuestos

Consideremos los primeros diez números naturales y los números por los cuales son divisibles.

Número natural	Es divisible por
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
10	1, 2, 5, 10

Observamos que cualquier número natural mayor que uno, es divisible, al menos, por 1 y por sí mismo.

Un número primo es un número natural mayor que 1, que es divisible solamente por 1 y por sí mismo.

Ejemplos: 2, 3, 5 y 7 son números primos.

Un número compuesto es un número natural mayor que 1, que no es primo.

Ejemplos: 4, 6, 8, 9 y 10 son números compuestos.

Por definición, el número 1 no es ni primo ni compuesto.

Ejemplos:

- 1) Para determinar si 51 es primo, comenzamos dividiendo 51 por 2 y continuamos dividiendo por los primos menores que 51.

$$\begin{array}{r} 25 \\ 2 \overline{)51} \\ \underline{4} \\ 11 \\ \underline{10} \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ 3 \overline{)51} \\ \underline{3} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

Observamos que 51 no es divisible por 2 y sí es divisible por 3. Por lo tanto, 51 es un número compuesto.

- 2) Para determinar si 53 es un número primo, dividimos 53 por primos menores que él hasta conseguir un cociente que resulte menor que el divisor.

$$\begin{array}{r} 26 \\ 2 \overline{)53} \\ \underline{4} \\ 13 \\ \underline{12} \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ 3 \overline{)53} \\ \underline{3} \\ 23 \\ \underline{21} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ 5 \overline{)53} \\ \underline{5} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ 7 \overline{)53} \\ \underline{49} \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 11 \overline{)53} \\ \underline{44} \\ 9 \end{array}$$

Observamos que el cociente 4 es menor que 11. Por lo tanto, podemos afirmar que el número 53 es primo.

- 3) Para determinar si 101 es primo, repetimos el proceso anterior hasta dividir 101 por 11, resultando 9 (el cociente) menor que 11. Por lo tanto, 101 es primo.

Existe un método muy antiguo para hallar números primos conocido como la criba de Eratóstenes, llamado así en honor al matemático griego que lo ideó.

Si queremos hallar los primos menores que 100 usando este método, debemos proceder de la siguiente forma:

- 1) Escribir los números agrupados por decenas, según se ilustra.
- 2) Eliminar el uno, porque sabemos que no es primo.
- 3) Dibujar un círculo alrededor del 2 y eliminar los múltiplos de 2. Esto se hace contando de dos en dos, a partir de 2.
- 4) Dibujar un círculo alrededor del 3 y eliminar los múltiplos de 3, contando de tres en tres, a partir de 3.
- 5) Dibujar un círculo alrededor del 5 y eliminar los múltiplos de 5, contando de cinco en cinco, a partir de 5.
- 6) Dibujar un círculo alrededor del 7 y eliminar los múltiplos de 7, contando de siete en siete, a partir de 7.
- 7) Dibujar un círculo alrededor de todos los números que no han sido eliminados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Podemos ver claramente, después de terminar el proceso, que los números encerrados en círculos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97 que corresponden a los primos menores que 100. Contándolos notamos que hay un total de veinticinco y que 2 es el único primo par.

El método usado por Eratóstenes puede ser mecanizado fácilmente, debido a que no es necesario escribir los números, basta con hacer marcas o perforaciones.

Ejercicio 1.4

Indicar si el número es primo o compuesto

- | | | |
|-------|---------|---------|
| 1) 39 | 8) 107 | 15) 361 |
| 2) 59 | 9) 129 | 16) 441 |
| 3) 61 | 10) 183 | 17) 457 |
| 4) 73 | 11) 209 | 18) 511 |
| 5) 85 | 12) 251 | 19) 899 |
| 6) 91 | 13) 283 | 20) 983 |
| 7) 93 | 14) 303 | |

1.5 Factorización prima

Al conocer los números primos, podemos expresar cualquier número natural como un producto de números primos. Por ejemplo, $18 = 2 \times 3 \times 3$, es la **factorización prima** de 18.

La factorización prima de un número es la expresión de dicho número como un producto de primos.

Para expresar un número como un producto de números primos, se divide el número por el menor de sus divisores primos, luego el cociente obtenido se divide por el menor de sus divisores primos y así sucesivamente, hasta obtener un cociente que sea un número primo. Entonces, dividimos el número primo por él mismo y obtenemos 1, concluyendo así el proceso.

Ejemplos:

- 1) Hallar la factorización prima de 60.

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 60 \\
 2 & 30 \\
 3 & 15 \\
 5 & 5 \\
 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 60 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\
 &= 2^2 \times 3 \times 5
 \end{aligned}$$

Los números 2, 3 y 5 son primos.

Se dividió 60 por el menor de sus divisores primos, es decir, 2. El cociente obtenido (30) se dividió a su vez por el menor de sus divisores, (2). El nuevo cociente (15) se dividió por el menor de sus divisores primos (3); y por último, se obtuvo el cociente (5) que es un divisor primo que se dividió por sí mismo.

- 2) Hallar la factorización prima en cada caso.

- a) 81

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 81 \\
 3 & 27 \\
 3 & 9 \\
 3 & 3 \\
 & 1
 \end{array}$$

- b) 108

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 108 \\
 2 & 54 \\
 3 & 27 \\
 3 & 9 \\
 3 & 3 \\
 & 1
 \end{array}$$

- c) 210

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 210 \\
 3 & 105 \\
 5 & 35 \\
 7 & 7 \\
 & 1
 \end{array}$$

Observamos que:

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$81 = 3^4$$

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Estos ejemplos nos llevan a señalar que hay una propiedad fundamental de los números naturales que le da gran importancia a los números primos y es el siguiente teorema.

Teorema fundamental de la aritmética: Todo número compuesto se puede expresar como un producto de números primos. Esta expresión es única, excepto por el orden de los factores.

Ejemplo:

$$35 = 5 \times 7$$

$$35 = 7 \times 5$$

5 y 7 son los únicos primos cuyo producto es 35.

Ejercicio 1.5

Hallar la factorización prima de los siguientes números:

- | | |
|--------|-----------|
| 1) 24 | 9) 144 |
| 2) 65 | 10) 235 |
| 3) 90 | 11) 400 |
| 4) 180 | 12) 512 |
| 5) 70 | 13) 343 |
| 6) 105 | 14) 729 |
| 7) 150 | 15) 961 |
| 8) 120 | 16) 1,024 |

1.6 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo**Máximo común divisor**

El número 12 es divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Luego, decimos que 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son **divisores** de 12.

Un número que es divisor de dos o más números es un divisor común de ellos. Por ejemplo:

Los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Los divisores comunes de 24 y 36 son: 2, 4, 6 y 12.

Observamos que, el máximo común divisor de 24 y 36 es 12, que es el divisor común más grande.

También se puede determinar el máximo común divisor de varios números expresando los números como un producto de factores primos (factorización prima), luego se toman los factores comunes con su menor exponente y el producto de ellos es el máximo común divisor.

En el ejemplo anterior, para hallar el máximo común divisor de 24 y 36 expresamos los números 24 y 36 como un producto de factores primos.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 36} \\ 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

Luego, se toman los factores comunes con su menor exponente, estos son 2^2 y 3. Finalmente, el máximo común divisor es el producto de ellos, esto es, $2^2 \times 3 = 4 \times 3$ que es igual a 12.

El máximo común divisor de varios números es el divisor común más grande de dichos números.

El máximo común divisor también es conocido como el divisor común mayor.

Ejemplos:

1) Máximo común divisor de 18 y 120.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 120} \\ 2 \overline{) 60} \\ 2 \overline{) 30} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Los factores comunes con su exponente menor son 2 y 3. El máximo común divisor es el producto de ellos, esto es, $2 \times 3 = 6$.

2) Máximo común divisor de 75, 90 y 135

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 75} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 90} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 135} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$75 = 3 \times 5^2$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$135 = 3^3 \times 5$$

Los factores comunes con su exponente menor son 3 y 5. El máximo común divisor es el producto de ellos, esto es, $3 \times 5 = 15$.

3) Máximo común divisor de 33 y 91

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 33} \\ 11 \overline{) 11} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 91} \\ 13 \overline{) 13} \\ 1 \end{array}$$

$$33 = 3 \times 11$$

$$91 = 7 \times 13$$

Como 1 es factor de todo número, entonces el máximo común divisor de 33 y 91 es 1.

Mínimo común múltiplo

Un número que es múltiplo de dos o más números es un múltiplo común de ellos.

Ejemplo:

Los múltiplos de 4 son: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...

Los múltiplos de 6 son: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

Los primeros múltiplos comunes de 4 y 6 son: 12, 24 y 36.

De manera que el **mínimo común múltiplo** de 4 y 6 es 12.

También se determina el mínimo común múltiplo expresando los números como un producto de factores primos, luego se toman todos los factores primos con su mayor exponente. El producto de ellos es el mínimo común múltiplo.

En el ejemplo anterior, se expresa 4 y 6 como producto de factores primos. Esto es:

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 4} \\ 2 \overline{) 2} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 6} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \times 3$$

Luego se toman los factores primos con su mayor exponente, esto es, 2^2 y 3. Finalmente, el mínimo común múltiplo es el producto de ellos, es decir $2^2 \times 3 = 4 \times 3$ que es igual a 12. Vemos que 12 es divisible por 4 y 6.

El mínimo común múltiplo de varios números es el múltiplo común más pequeño de dichos números.

El mínimo común múltiplo también es conocido como el múltiplo común menor.

Ejemplos:

1) Mínimo común múltiplo de 18 y 24.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)18} \\ 3 \overline{)9} \\ 3 \overline{)3} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{)24} \\ 2 \overline{)12} \\ 2 \overline{)6} \\ 3 \overline{)3} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 18 = 2 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3 \end{array}$$

El mínimo común múltiplo es el producto de 2^3 y 3^2 , esto es, $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9$ que es igual a 72.

2) Mínimo común múltiplo de 12, 42 y 56.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)12} \\ 2 \overline{)6} \\ 3 \overline{)3} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{)42} \\ 3 \overline{)21} \\ 7 \overline{)7} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{)56} \\ 2 \overline{)28} \\ 2 \overline{)14} \\ 7 \overline{)7} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 = 2^2 \times 3 \\ 42 = 2 \times 3 \times 7 \\ 56 = 2^3 \times 7 \end{array}$$

El mínimo común múltiplo de 12, 42 y 56 es $2^3 \times 3 \times 7 = 8 \times 3 \times 7$ que es igual a 168.

Ejercicio 1.6

Hallar el máximo común divisor de los siguientes números:

- | | | |
|------------|----------------|------------------|
| 1) 24 y 30 | 5) 18 y 36 | 9) 12, 68 y 92 |
| 2) 12 y 80 | 6) 33 y 121 | 10) 64, 48 y 120 |
| 3) 32 y 51 | 7) 36 y 96 | 11) 98 y 343 |
| 4) 40 y 64 | 8) 14, 42 y 84 | 12) 324 y 486 |

Hallar el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

- | | | |
|-------------|---------------|-----------------|
| 13) 8 y 14 | 17) 56 y 24 | 21) 8, 10 y 25 |
| 14) 10 y 15 | 18) 30 y 45 | 22) 14, 18 y 21 |
| 15) 8 y 20 | 19) 4, 8 y 12 | 23) 144 y 156 |
| 16) 12 y 32 | 20) 6, 9 y 15 | 24) 343 y 2,401 |

1.7 Orden de las operaciones

Es importante aprender cómo se simplifican las expresiones que contienen más de una operación. Lo que aparece entre paréntesis siempre se efectúa primero. Sin embargo, las expresiones que no contienen paréntesis pueden crear confusión y ofrecer respuestas diferentes al cambiar el orden de las operaciones. Por ejemplo, si tratamos de simplificar la expresión $2 + 5 \times 3$, podemos obtener dos respuestas diferentes. Si sumamos primero obtenemos 7×3 que es igual a 21. Si multiplicamos y luego sumamos obtenemos $2 + 15$ que es igual a 17.

Para evitar esta ambigüedad, debemos seguir un orden para efectuar las operaciones indicadas.

Orden de las operaciones:

- 1) Efectuar lo que aparece en paréntesis.
- 2) Simplificar las expresiones exponenciales.
- 3) Efectuar las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.
- 4) Efectuar las sumas y restas en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

De acuerdo con estas reglas, en la expresión $2 + 5 \times 3$, la multiplicación se efectúa antes de la suma.

Esto es, $2 + 5 \times 3 = 2 + 15$ que es igual a 17.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad 5 \times (3 + 8) \\ \quad \quad \quad 5 \times (3 + 8) = 5 \times 11 \\ \quad \quad \quad \quad \quad = 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 11 - 3 \times 2 \\ \quad \quad \quad 11 - 3 \times 2 = 11 - 6 \\ \quad \quad \quad \quad \quad = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad 12 \times 5 \div 3 \times 2 \\ \quad \quad \quad 12 \times 5 \div 3 \times 2 = 60 \div 3 \times 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad = 20 \times 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad 3^2 \times 2^4 + 5 \\ \quad \quad \quad 3^2 \times 2^4 + 5 = 9 \times 16 + 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad = 144 + 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad = 149 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad 4^2(8 - 3) + 2(8 + 5) &= 4^2(5) + 2(13) \\
 &= 16(5) + 2(13) \\
 &= 80 + 26 \\
 &= 106
 \end{aligned}$$

También existen expresiones numéricas que contienen distintos tipos de símbolos de agrupación, tales como, paréntesis rectangulares o corchetes y llaves. En estos casos, se efectúan primero las operaciones del símbolo de agrupación que esté más al centro, esto es, de dentro hacia afuera, luego aplicamos las otras reglas de orden de las operaciones.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad 2 + 3[5(7 - 4)] &= 2 + 3[5(3)] \\
 &= 2 + 3[15] \\
 &= 2 + 45 \\
 &= 47
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad [4(3 + 2) - 3(9 - 7)] \div 2 &= [4(5) - 3(2)] \div 2 \\
 &= [20 - 6] \div 2 \\
 &= 14 \div 2 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad 1 + 2\{3 + 2[4 + 5(3 - 2)] + 2\} &= 1 + 2\{3 + 2[4 + 5(1)]2\} \\
 &= 1 + 2\{3 + 2[4 + 5] + 2\} \\
 &= 1 + 2\{3 + 2[9] + 2\} \\
 &= 1 + 2\{3 + 18 + 2\} \\
 &= 1 + 2\{23\} \\
 &= 1 + 46 \\
 &= 47
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7

Colocar los paréntesis, si es necesario, para que la expresión sea cierta.

- 1) $3 \times 5 + 4 = 19$
- 2) $5 \times 2 + 3 = 25$
- 3) $8 \div 2 + 1 = 5$
- 4) $9 + 1 \times 3 = 30$
- 5) $4 + 3 \times 2 = 10$
- 6) $7 \times 2 - 3 = 11$

Simplificar cada una de las siguientes expresiones numéricas aplicando las reglas de orden de las operaciones.

$$7) \quad 5(7 + 2)$$

$$8) \quad 3 + 4(5 + 2)$$

$$9) \quad 9 + 3 \times 4$$

$$10) \quad 15 \div 5 + 6$$

$$11) \quad 56 \div 8 + 3 \times 2$$

$$12) \quad (5 - 2)^2 \times (3 - 2)^2$$

$$13) \quad 3^2 \times 7 - 2^3 \div 4$$

$$14) \quad 3^2 \times 10^3 + 2^3 \times 10^2 + 7 \times 10$$

$$15) \quad 70 - 3(3^2 - 2^3) \times (3 + 4 \times 5)$$

$$16) \quad 3(8 - 5)^2 - 36 \div (13 - 4)$$

$$17) \quad 6(2 + 3) - 4(7 - 2) \div 5$$

$$18) \quad 2[(5 - 3) + 4(10 - 7)] -$$

$$19) \quad 4 + 3[(5 - 2) + 2(1 + 3)]$$

$$20) \quad 2[3(2 + 4) - 12 \div 2]$$

$$21) \quad 2[12 + (11 - 9)^3]$$

$$22) \quad 5[7 + 3(10 - 8)^2]$$

$$23) \quad 3(2) + 2[6(3 - 2) + 4(2 + 1)]$$

$$24) \quad 36 - 2[1 + 3(9 - 6) - 4(7 - 5)]$$

$$25) \quad 5 + \{2 + 3[2(6 - 3)] + 2(6 - 3)\}$$

$$26) \quad 3\{2 + 5[3 + (6 - 4)^2 + 1] - 7\}$$

$$27) \quad 4\{2 + [9 + 3(7 - 4)] + 5\}$$

$$28) \quad 3\{4[11 + 2(6 - 3) + 1] + 2\}$$

1.8 Repaso

1) Colocar una marca de cotejo ($\checkmark$) donde corresponda en la tabla para indicar si los siguientes números son divisibles por 2, 3 ó 5.

Números	2	3	5
72			
75			
330			
2,562			
28,020			
24,635			

2) Expresar usando la notación exponencial.

a) $2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7$

b) $3 \times 3 \times 5 \times 8 \times 8 \times 8$

3) Simplificar las siguientes expresiones.

a) $2^3 \times 5^2$

b) $2^5 \times 3^2 \times 7$

4) Cuando dos números primos consecutivos tienen solamente un número natural entre ellos, decimos que forman una pareja de **primos gemelos**. ¿Cuántas parejas de primos gemelos menores que cien hay? ¿Cuáles son? (Ver la criba de Eratóstenes en la Sec. 1.4)

5) Hallar la factorización prima de 220.

6) Hallar el máximo común divisor de 60 y 80.

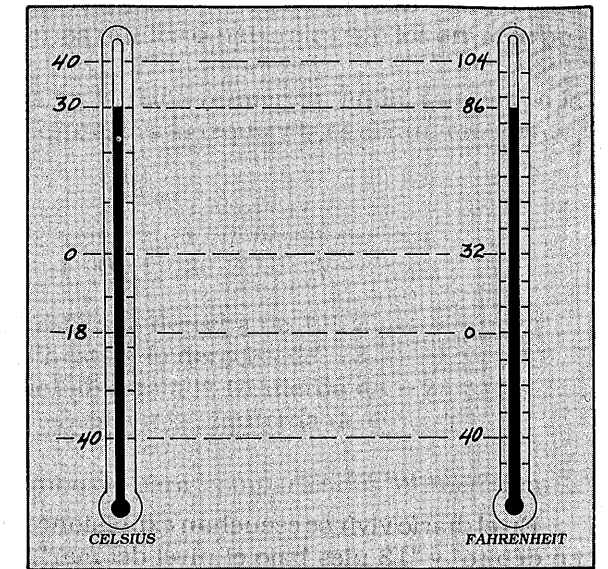
7) Hallar el mínimo común múltiplo de 30 y 42.

8) Simplificar.

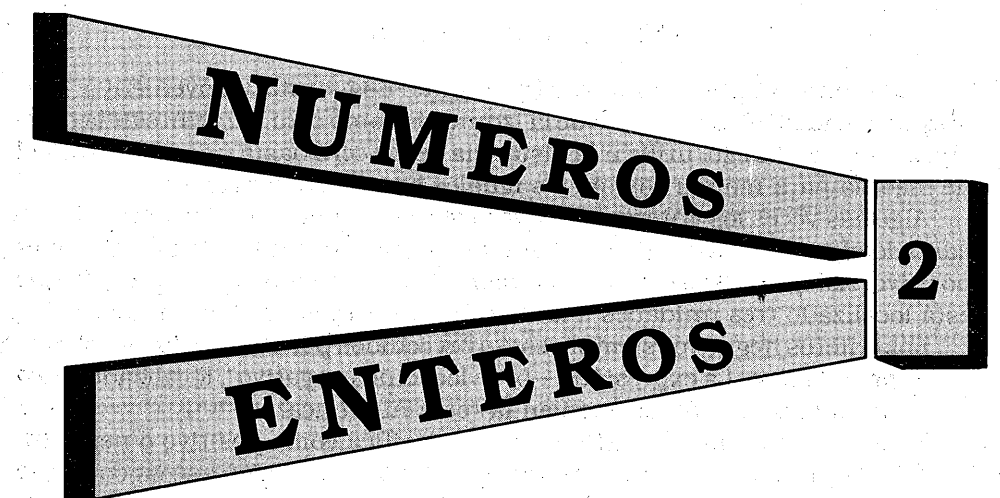
a) $2(4 + 2) \div 3 - 2$

b) $10 + 1 - 5 \times 2 \div 5$

c) $41 - 3\{(4^2 - 6) - 4 \div 2^2\}$

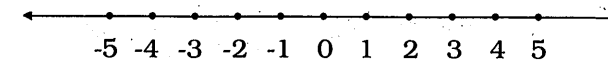


Un número entero puede ser positivo, negativo o cero.



2, 3, 4, ... El símbolo ... indica que los números continúan indefinidamente en ambas direcciones. Notemos que, los números naturales son los **enteros positivos**.

Si comparamos dos números en la recta numérica, aquél que está a la derecha es el número mayor, y el que está a la izquierda es el número menor. Por ejemplo:



- 4 es mayor que 1, ya que 4 está a la derecha de 1
- 2 es mayor que -3, ya que 2 está a la derecha de -3
- 5 es menor que -2, ya que -5 está a la izquierda de -2
- 3 es menor que 4, ya que -3 está a la izquierda de 4

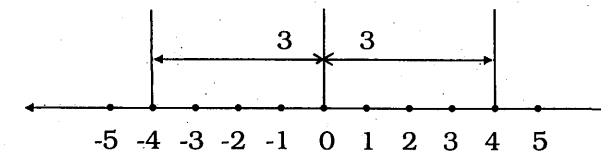
Utilizamos los siguientes símbolos para comparar dos números en la recta numérica. Estos son:

- > se lee "mayor que"
- < se lee "menor que"

De manera que, los ejemplos mencionados se pueden expresar como:

$$4 > 1, 2 > -3, -5 < -2 \text{ y } -3 < 4.$$

Si tomamos un entero diferente de cero podemos encontrar otro número entero que esté a la misma distancia de cero en la recta numérica. Por ejemplo, 3 y -3 están a la misma distancia de cero.



Dos números que están a distintos lados del cero y a igual distancia se les llama **opuestos**.

El opuesto de un número entero es otro entero que está a igual distancia del cero.

De manera que, -3 es el opuesto de 3 y 3 es el opuesto de -3. El opuesto de cero es cero.

Como el opuesto de -5 se representa por $-(-5)$, tenemos que $-(-5) = 5$.

Para estudiar los números negativos necesitamos introducir el concepto de distancia. Sabemos que si se tiene un número entero cualquiera en la

2

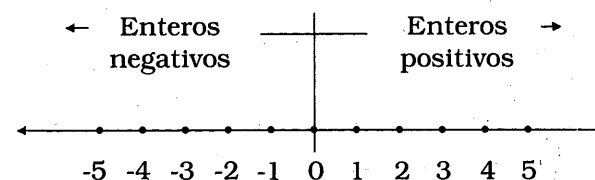
NUMEROS ENTEROS

2.1 La recta numérica

En el diario vivir se escuchan expresiones como: "5 grados bajo cero", "\$15 en débito" y "13 pies bajo el nivel del mar". Estas expresiones se refieren a números menores que cero.

Hasta el momento hemos realizado operaciones con **enteros positivos**, localizados a la derecha del cero en la **recta numérica**. Dicha recta se dibuja horizontalmente y los puntos se identifican con números.

En esta sección conoceremos los **enteros negativos** que están localizados a la izquierda del cero en la recta numérica. A continuación vemos la representación de los enteros positivos y negativos en la recta numérica.



Los puntos se pueden marcar localizando dos puntos convenientes cualesquiera e identificar el punto de la izquierda como cero y el punto de la derecha como uno. Luego, utilizar la distancia desde cero hasta uno como unidad de medida para marcar distancias iguales en ambas direcciones.

Algunas veces los enteros positivos están precedidos por el símbolo "+", llamado **signo positivo**. Si este signo no aparece se asume que el entero es positivo. Así que +3 se lee "tres" y 3 representa el mismo entero que +3, que está localizado tres unidades a la derecha del cero en la recta numérica.

Los enteros negativos siempre están precedidos por el símbolo "-", llamado **signo negativo**. La expresión "-5" se lee "cinco negativo", localizado cinco unidades a la izquierda del cero en la recta numérica.

El cero es el punto de partida y no se clasifica como positivo o negativo.

Así, los enteros positivos, negativos y el cero al considerarse en conjunto se conocen como los **números enteros**, éstos son, ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1,

recta numérica se puede hallar otro que esté a la misma distancia de cero. Por ejemplo, hay dos puntos que están a dos unidades de distancia del cero, correspondientes a los números 2 y -2 . Esta distancia se llama **valor absoluto**. El valor absoluto de 2 es 2 y el valor absoluto de -2 también es 2. El valor absoluto de 2 se representa de la forma $|2|$. El valor absoluto de -2 se representa de la forma $|-2|$.

De manera que como cualquier número y su opuesto están localizados a igual distancia del cero, se dice que tienen el mismo valor absoluto.

El valor absoluto de un número entero es la distancia entre ese número y el cero en la recta numérica. El valor absoluto de cero es cero.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} |-3| &= 3 & |0| &= 0 \\ |7| &= 7 & |-135| &= 135 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1

Utilizar los símbolos $>$ ó $<$ para sustituir el signo de interrogación en cada caso.

- | | | | |
|------------|-------------|--------------|---------------|
| 1) $8 ? 2$ | 3) $-7 ? 9$ | 5) $-5 ? -1$ | 7) $-2 ? -9$ |
| 2) $0 ? 5$ | 4) $-3 ? 0$ | 6) $-6 ? 3$ | 8) $10 ? -23$ |

Hallar el opuesto de cada número.

- | | | | |
|-----------|-----------|-------------|--------------|
| 9) 9 | 11) -81 | 13) $-(8)$ | 15) $-(10)$ |
| 10) -25 | 12) 0 | 14) $-(-7)$ | 16) $-(-17)$ |

Hallar el valor de cada expresión.

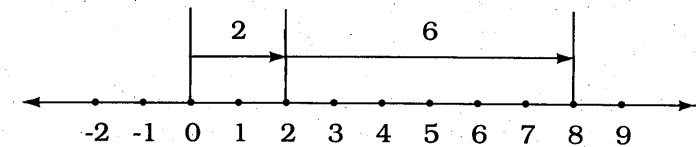
- | | | |
|-----------------|------------------|--------------------|
| 17) $ 14 $ | 24) $- 13 $ | 31) $ 12 - -4 $ |
| 18) $ -3 $ | 25) $- +13 $ | 32) $ 4 + -15 $ |
| 19) $ 6 $ | 26) $ -(-5) $ | 33) $ -5 + 5 $ |
| 20) $ 10 $ | 27) $ 8 + 9 $ | 34) $ -9 - 9 $ |
| 21) $ -19 $ | 28) $ 17 - 4 $ | 35) $ 12 + 10 $ |
| 22) $ -(-5) $ | 29) $ 13 + 6 $ | 36) $ -3 + -18 $ |
| 23) $- -5 $ | 30) $ 15 - 8 $ | |

2.2 Suma

La recta numérica se puede utilizar para ilustrar la suma de números enteros. Está establecido que si el número es positivo nos movemos hacia la derecha del cero y si el número es negativo nos movemos hacia la izquierda. Si el número es cero, no nos movemos.

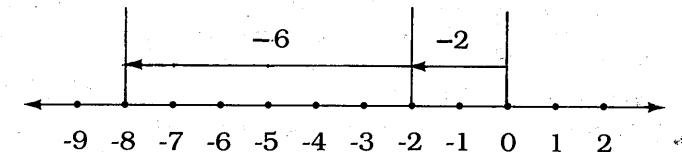
Ejemplo: Sumar en una recta numérica.

- 1) Positivo + Positivo: $2 + 6$



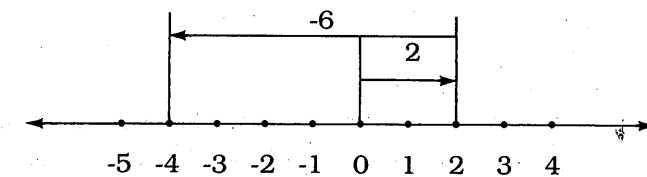
Nos movemos desde cero hasta 2, luego desde 2 nos movemos 6 unidades más hacia la derecha y llegamos hasta 8. Por lo tanto, $2 + 6 = 8$.

- 2) Negativo + Negativo: $-2 + (-6)$



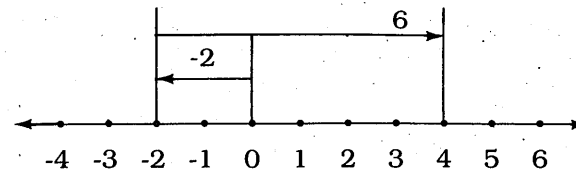
Nos movemos 2 unidades hacia la izquierda (porque el número es negativo), luego 6 unidades más hacia la izquierda y llegamos a -8 . Por lo tanto, $-2 + (-6) = -8$.

- 3) Positivo + Negativo: $2 + (-6)$



Nos movemos 2 unidades hacia la derecha, luego 6 unidades a la izquierda y llegamos a -4 . Por lo tanto, $2 + (-6) = -4$.

4) Negativo + Positivo: $-2 + 6$



Nos movemos 2 unidades hacia la izquierda, luego 6 unidades a la derecha y llegamos a 4. Por lo tanto, $-2 + 6 = 4$.

El método de sumar números enteros en una recta numérica como se ilustra en los ejemplos anteriores no es muy práctico. Sin embargo, estos ejemplos nos llevan a las siguientes reglas para la suma de números enteros.

Reglas para la suma de números enteros:

Positivo + Positivo, Negativo + Negativo	{	Se suman los valores absolutos y se mantiene el mismo signo.
Positivo + Negativo Negativo + Positivo		Se halla la diferencia de los valores absolutos de los números.
		El resultado es positivo, si el número positivo tiene el valor absoluto mayor.
		El resultado es negativo, si el número negativo tiene el valor absoluto mayor.

Ejemplos:

1) $8 + 9$

$8 + 9 = 17$

Positivo + Positivo: Se suman los valores absolutos y el resultado mantiene el mismo signo.

2) $-12 + (-13)$

$-12 + (-13) = -25$

Negativo + Negativo: Se suman los valores absolutos y el resultado mantiene el signo de negativo.

3) $13 + (-6)$

$13 + (-6) = 7$

Positivo + Negativo: Se halla la diferencia de los valores absolutos. El resultado es positivo, ya que 13 tiene el valor absoluto mayor.

4) $-6 + 14$

$-6 + 14 = 8$

Negativo + Positivo: Se halla la diferencia de los valores absolutos. El resultado es positivo, ya que 14 tiene el valor absoluto mayor.

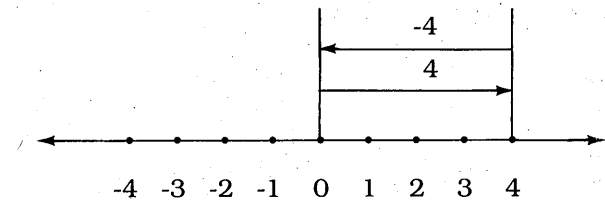
5) $-12 + 8$

$-12 + 8 = -4$

Negativo + Positivo: Se halla la diferencia de los valores absolutos. El resultado es negativo, ya que -12 tiene el valor absoluto mayor.

6) $4 + (-4)$

En este ejemplo, la relación entre 4 y -4 , es que son opuestos uno del otro. Si utilizamos la recta numérica para ilustrar esta suma, nos movemos 4 unidades hacia la derecha, luego 4 unidades a la izquierda y llegamos a 0.



Por lo tanto, $4 + (-4) = 0$. De manera que, el opuesto de un número es otro número tal que la suma de ellos sea cero. Así que, $4 + (-4) = 0$ y $-4 + 4 = 0$.

Para sumar más de dos enteros, comenzamos de izquierda a derecha y sumamos los primeros dos números. Luego, a este resultado se le suma el tercer número. Y así sucesivamente hasta sumar todos los enteros.

Ejemplos:

$$1) 4 + (-6) + 7$$

$$4 + (-6) + 7 = -2 + 7 \\ = 5$$

$$2) -5 + 2 + (-1) + 3$$

$$-5 + 2 + (-1) + 3 = -3 + (-1) + 3 \\ = -4 + 3 \\ = -1$$

También podemos sumar varios enteros sumando primero todos los enteros positivos, luego todos los enteros negativos y finalmente se suman ambos resultados. En los ejemplos anteriores resultaría así:

$$1) 4 + (-6) + 7$$

$$4 + (-6) + 7 = 11 + (-6) \\ = 5$$

$$2) -5 + 2 + (-1) + 3$$

$$-5 + 2 + (-1) + 3 = 5 + (-6) \\ = -1$$

Ejemplos de aplicación:

- 1) A principio de mes José tenía \$64 en su cuenta de cheques. Durante el mes, depositó \$143 y \$220. Hizo cheques por \$88, \$103 y \$190. ¿Cuál es su balance actual?

Consideramos los depósitos como enteros positivos y los cheques como enteros negativos. Así que al sumar:

64		-88	
143		-103	
+ 220		+ -190	
427	Total en depósitos	-381	Total en cheques

Luego, la suma final es $427 + (-381) = 46$. Por lo tanto, la cuenta de José tiene un balance de \$46.

- 2) Un termómetro registró la temperatura de 5 grados bajo cero. Luego la temperatura subió 15 grados. ¿Qué temperatura registró el termómetro?

Representamos la temperatura 5 grados bajo cero como -5 . Luego, $-5 + 15 = 10$. Por lo tanto, el termómetro registró 10 grados.

Ejercicio 2.2

Efectuar las siguientes sumas:

1) $4 + 9$

2) $18 + 6$

3) $25 + 39$

4) $-4 + (-9)$

5) $-11 + (-7)$

6) $-8 + (-25)$

7) $-4 + 9$

8) $-16 + 10$

9) $-12 + 3$

10) $4 + (-9)$

11) $17 + (-3)$

12) $27 + (-9)$

13) $-4 + 4$

14) $-6 + 0$

15) $0 + 12$

16) $-8 + (-3)$

17) $-37 + 40$

18) $7 + (-11)$

19) $-11 + (-17)$

20) $-8 + 22$

21) $51 + (-11)$

22) $75 + 23$

23) $20 + (-56)$

24) $3 + 7 + (-8)$

25) $-9 + (-4) + (-3)$

26) $-3 + 2 + (-18)$

27) $4 + 8 + (-16)$

28) $36 + (-36)$

29) $16 + (-23) + (-4)$

30) $-21 + 5 + (-5)$

Resolver.

- 31) Pedro tomó el ascensor en el vestíbulo del edificio y bajó 3 pisos para recoger cierto equipo. Luego subió 8 pisos para entregar el equipo. ¿Cuántos pisos subió sobre el vestíbulo?
- 32) Un turista ganó \$35 en el casino. Esa misma noche perdió \$53 y luego ganó \$31. ¿Cuánto ganó esa noche?
- 33) Rosa recibió una notificación del banco indicando que su cuenta de cheques estaba sobregirada por \$30. Luego depositó \$90. ¿Cuál es su nuevo balance?
- 34) Miguel tenía a principio de marzo \$492 en su cuenta de cheques. Durante el mes, pagó en cheques \$286, \$513 y \$490. Luego depositó \$632 y \$197. ¿Cuál es su nuevo balance?
- 35) Ana pesaba 145 libras, rebajó 9 en la primera semana. En la segunda semana rebajó 8 libras y aumentó 3 libras en la tercera semana. ¿Cuánto pesó al final de las tres semanas?

2.3 Resta

La resta se define en términos de la suma. Se dice que $7 - 3 = 7 + (-3)$ y se aplican las reglas de la suma estudiadas anteriormente.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 1) 9 - 4 & = 9 + (-4) \\ & = 5 \\ 2) 15 - 8 & = 15 + (-8) \\ & = 7 \\ 3) 7 - (-4) & = 7 + 4 \\ & = 11 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4) -6 - 3 & = -6 + (-3) \\ & = -9 \\ 5) -14 - (-8) & = -14 + 8 \\ & = -6 \\ 6) 2 - 9 & = 2 + (-9) \\ & = -7 \end{array}$$

De manera que, cuando se restan números enteros, se cambia el problema de resta a la suma de su opuesto. El número que está siendo restado se llama **sustraendo**. El sustraendo es el número que le sigue al signo de resta. El signo de resta se reemplaza por el signo de suma y se busca el opuesto del sustraendo. Una vez se transforma el problema de resta a suma, se procede con las reglas de suma de números enteros.

Resumiendo, decimos que para restar el entero **b** del entero **a**, se suma el opuesto de **b** con **a**. Así que, para dos enteros **a** y **b** cualesquiera, tenemos que $a - b = a + (-b)$.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 1) 7 - 11 & 7 - 11 = 7 + (-11) \\ & = -4 \\ 2) 7 - (-11) & 7 - (-11) = 7 + 11 \\ & = 18 \\ 3) -2 - (-8) & -2 - (-8) = -2 + 8 \\ & = 6 \\ 4) -2 - 8 & -2 - 8 = -2 + (-8) \\ & = -10 \end{array}$$

Cuando la resta ocurre varias veces en el problema, se expresa cada resta como la suma de su opuesto. Luego se procede como la suma:

Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 1) 4 - 2 - 7 & 4 - 2 - 7 = 4 + (-2) + (-7) \\ & = 2 + (-7) \\ & = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2) -7 - (-3) - 5 & \\ & -7 - (-3) - 5 = -7 + 3 + (-5) \\ & = -4 + (-5) \\ & = -9 \end{array}$$

Ejemplo de aplicación:

Un helicóptero está a 594 pies sobre el nivel del mar y un submarino a 245 pies bajo el nivel del mar. ¿A qué distancia está el helicóptero del submarino?

Consideramos el problema como una resta, la diferencia entre el punto más alto (el helicóptero) y el punto más bajo (el submarino). Representamos los 594 pies sobre el nivel del mar como un entero positivo y los 245 pies bajo el nivel del mar como un entero negativo. Luego, $594 - (-245) = 594 + 245$ que es igual a 839. Por lo tanto, el helicóptero está a 839 pies de distancia del submarino.

Ejercicio 2.3

Efectuar las siguientes operaciones:

- | | |
|-------------------|------------------------|
| 1) $5 - 11$ | 16) $14 - (-7)$ |
| 2) $8 - 17$ | 17) $-14 - (-7)$ |
| 3) $6 - 30$ | 18) $6 - 6$ |
| 4) $0 - 7$ | 19) $6 - (-6)$ |
| 5) $-4 - 9$ | 20) $14 - 31$ |
| 6) $-3 - 14$ | 21) $-7 - (-5)$ |
| 7) $-4 - 15$ | 22) $-2 + 7 - (-10)$ |
| 8) $5 - (-3)$ | 23) $-6 - (-2) - 9$ |
| 9) $3 - (-13)$ | 24) $-6 - (-2) - (-9)$ |
| 10) $-17 - 3$ | 25) $6 - (-1) - (-2)$ |
| 11) $-16 - (-4)$ | 26) $3 + 5 - 16$ |
| 12) $-21 - (-8)$ | 27) $2 - 0 - 9$ |
| 13) $-7 - (-8)$ | 28) $3 + (+8) + (+5)$ |
| 14) $-17 - (-42)$ | 29) $-2 + (-9) - 7$ |
| 15) $51 - 26$ | 30) $-2 - (-3) - 3$ |

Resolver.

- 31) Un frente de frío hizo que la temperatura de un país bajara de 34 grados sobre cero a 11 grados bajo cero. ¿Cuál fue el cambio de temperatura?

- 32) El punto más alto en el Desierto del Sahara tiene una altura de 11.000 pies y el punto más bajo 440 pies bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la diferencia entre estos puntos?
- 33) Durante un invierno la temperatura registrada fue 19 grados y la más baja 7 grados bajo cero. Hallar la diferencia entre la temperatura más alta y la más baja.

2.4 Multiplicación

En los números naturales, la multiplicación se define como una suma repetida. Esto es, 4×3 significa que, cuatro veces tres es $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Para definir la multiplicación de dos números enteros hay que considerar cuatro casos. Estos son:

1) Ambos enteros positivos

Recordemos que los enteros positivos son los números naturales. De manera que, la definición de la suma repetida implica que el producto de dos enteros positivos es otro entero positivo. Por ejemplo, $4(3) = 12$.

2) Un entero positivo y otro negativo

Si $4(3)$ se interpreta como una suma, esto es, $4(3) = 3 + 3 + 3 + 3$ que es igual a 12, análogamente, $4(-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$ es igual a -12. Esto sugiere que el producto de un entero positivo y otro negativo resulta ser un entero negativo. El valor absoluto del producto se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores.

3) Un entero negativo y otro positivo

Por la propiedad conmutativa $4(3) = 3(4)$. También es cierto que $4(-3) = -3(4)$ que es igual a -12. Esto sugiere que el producto de un entero negativo y otro positivo es un entero negativo. El valor absoluto del producto se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores.

4) Ambos enteros negativos

Para determinar el producto de dos enteros negativos, consideremos el siguiente patrón que ilustra los siguientes productos:

$$\begin{aligned} (-3)(4) &= -12 \\ (-3)(3) &= -9 \\ (-3)(2) &= -6 \\ (-3)(1) &= -3 \\ (-3)(0) &= 0 \end{aligned}$$

Observamos que según el segundo factor disminuye en 1, el producto aumenta 3. Si seguimos este patrón, resultaría que:

$$(-3)(-1) = 3$$

$$(-3)(-2) = 6$$

$$(-3)(-3) = 9$$

$$(-3)(-4) = 12$$

Esto sugiere que el producto de dos enteros negativos es un entero positivo. El valor absoluto del producto se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores.

Los ejemplos anteriores nos llevan a las siguientes reglas.

Reglas para la multiplicación de números enteros:

	Signo del producto	Valores absolutos
Positivo $\times$ Positivo	+	se multiplican
Positivo $\times$ Negativo	-	
Negativo $\times$ Positivo	-	
Negativo $\times$ Negativo	+	

Ejemplos:

$$1) 3(7) = 21$$

$$3) -3(7) = -21$$

$$2) 3(-7) = -21$$

$$4) -3(-7) = 21$$

Estas reglas se usan cuando multiplicamos dos números enteros. Si se quiere hallar el producto de más de dos enteros, aplicamos las reglas varias veces.

Ejemplos:

$$1) (-3)(2)(-5) = 30$$

$$\begin{aligned} (-3)(2)(-5) &= (-6)(-5) \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$2) (-3)(-2)(-5) = -30$$

$$\begin{aligned} (-3)(-2)(-5) &= (6)(-5) \\ &= -30 \end{aligned}$$

$$3) (-1)(-2)(1)(-5) = -10$$

$$\begin{aligned} (-1)(-2)(1)(-5) &= (2)(1)(-5) \\ &= (2)(-5) \\ &= -10 \end{aligned}$$

Ejemplos de aplicación:

Juan tenía \$500 en su cuenta de cheques. Giró dos cheques de \$50 cada uno y tres de \$73 cada uno. ¿Cuál es su nuevo balance?

Podemos hallar el total en cheques de la siguiente manera: $2(50) = 100$ y $3(73) = 219$, luego $100 + 219 = 319$. Por último, $500 - 319 = 181$. Por lo tanto, el nuevo balance de su cuenta es de \$181.

Ejercicio 2.4

Hallar el producto indicado

- | | | |
|---------------|--------------------|-----------------------|
| 1) $(6)(3)$ | 10) $(0)(-10)$ | 19) $(-2)(-1)(3)$ |
| 2) $(-6)(3)$ | 11) $6(-11)$ | 20) $4(-7)(3)$ |
| 3) $(8)(-8)$ | 12) $-8(2)$ | 21) $18(0)(-13)$ |
| 4) $(7)(5)$ | 13) $-2(7)(4)$ | 22) $-9(-1)(-2)$ |
| 5) $-9(3)$ | 14) $(-1)(-5)(-6)$ | 23) $(-3)^2$ |
| 6) $-5(0)$ | 15) $2(9)(-3)$ | 24) $(-7)^2$ |
| 7) $(-6)(-9)$ | 16) $0(6)(-2)$ | 25) $(-2)^2 - (-5)^2$ |
| 8) $-8(-9)$ | 17) $3(6)(-4)$ | 26) $(-2)^2 - (-3)^2$ |
| 9) $3(-7)$ | 18) $-4(8)(-5)$ | |

Resolver.

- 27) María tenía en su cuenta de cheques \$453. Giró cuatro cheques de \$15 cada uno. ¿Cuál es su nuevo balance?
- 28) Una joven acumuló 325 puntos en un concurso, pero recibió la penalidad de 15 puntos en 3 ocasiones. ¿Cuál fue el total de puntos acumulados?

2.5 División

La división se define en términos de la multiplicación. De manera que:

$$\begin{aligned} 12 \div 3 &= 4 \text{ porque } 4 \times 3 = 12 \\ 12 \div (-3) &= -4 \text{ porque } -4 \times -3 = 12 \\ -12 \div 3 &= -4 \text{ porque } -4 \times 3 = -12 \\ -12 \div (-3) &= 4 \text{ porque } 4 \times -3 = -12 \end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores nos llevan a las siguientes reglas para dividir números enteros.

Reglas para la división de números enteros:

	Signo del cociente	Valores absolutos
Positivo $\div$ Positivo	+	se dividen
Positivo $\div$ Negativo	-	
Negativo $\div$ Positivo	-	
Negativo $\div$ Negativo	+	

Podemos observar que el signo de un cociente se determina con las mismas reglas de multiplicación.

Ejemplos:

- $35 \div 7 = 5$
- $35 \div (-7) = -5$
- $(-35) \div 7 = -5$
- $(-35) \div (-7) = 5$

Ejercicio 2.5

Hallar el cociente.

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 1) $32 \div 4$ | 11) $(-100) \div (-25)$ |
| 2) $(-32) \div 8$ | 12) $121 \div 11$ |
| 3) $(-72) \div (-9)$ | 13) $(-81) \div 3$ |
| 4) $27 \div (-3)$ | 14) $(-64) \div 8$ |
| 5) $45 \div 9$ | 15) $169 \div (-13)$ |
| 6) $(-48) \div (-12)$ | 16) $(-57) \div (-19)$ |
| 7) $88 \div (-8)$ | 17) $36 \div 9$ |
| 8) $144 \div 12$ | 18) $198 \div (-9)$ |
| 9) $0 \div (-3)$ | 19) $(-243) \div 9$ |
| 10) $(-51) \div 17$ | 20) $(-576) \div (-9)$ |

2.6 Orden de las operaciones

A continuación se presentan algunos ejemplos relacionados con la simplificación de expresiones numéricas usando las reglas de orden de las operaciones.

Debemos recordar lo siguiente:

- 1) Efectuar lo que aparece en paréntesis.
- 2) Simplificar las expresiones exponenciales.
- 3) Efectuar las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.
- 4) Efectuar las sumas y restas en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad (-3)^2 - 2(8 - 3) - 5 \\
 (-3)^2 - 2(8 - 3) - 5 &= 9 - 2(5) - 5 \\
 &= 9 - 10 - 5 \\
 &= -1 - 5 \\
 &= -6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad -(-3)^2 \times (5 - 7)^2 + 9 \div 3 \\
 -(-3)^2 \times (5 - 7)^2 + 9 \div 3 &= -9 \times (-2)^2 + 9 \div 3 \\
 &= -9 \times 4 + 9 \div 3 \\
 &= -36 + 3 \\
 &= -33
 \end{aligned}$$

También debemos recordar que existen expresiones numéricas que contienen distintos signos de agrupación. En estos casos, se efectúan primero las operaciones del signo de agrupación que esté más al centro, esto es, de dentro hacia fuera. Luego se aplican las reglas de orden de las operaciones.

$$\begin{aligned}
 \text{Ejemplo: } -2[(-5 + 3)^3 + (-4 - 6)^2] \\
 -2[(-5 + 3)^3 + (-4 - 6)^2] &= -2[(-2)^3 + (-10)^2] \\
 &= -2[-8 + 100] \\
 &= -2[92] \\
 &= -184
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.6

Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

- 1) $2 - (8 - 10) \div 2$
- 2) $(-3)^2 - (-2)^2 - 5$
- 3) $4 - (-2)^2 + (-3)$
- 4) $4(2 - 7) \div 5$
- 5) $16 \div 2 - 9 \div 3$
- 6) $7 - 16 \div 4(-3)$

- 7) $8 + 4 \div 2 + 8 \times 2 - 6 \div 3$
- 8) $[(-7)(3) + (-6)] \div (-9)$
- 9) $[(-5 + 3) + (7 - 9)] \div (-2)$
- 10) $[(5)(-7) - (-8)] \div 3$
- 11) $[10 + (-4)]^2 \div (2)(-3)$
- 12) $6 - [4 + 3 - (5 - 10) + 4]$
- 13) $[(1 - 5) + (-4)(2)] \div [6 + (-10)]$
- 14) $-5\{(-2 + 5)^3 - [6 - (-1)]\}$
- 15) $\{(-5 - 3)^2 \div [-13 - (-5)]\} - 2$
- 16) $7 - 2\{5 + [6 + 2(7 - 3)]\} + 4$

2.7 Repaso

- 1) ¿Cuál es el opuesto de -11 ?
- 2) $|-14| = ?$
- 3) Efectuar las operaciones indicadas.

- | | |
|------------------------|----------------------|
| a) $8 + 15$ | k) $6(7)$ |
| b) $-19 + (-7)$ | l) $(-8)(5)$ |
| c) $-15 + 9$ | m) $(-9)(-8)$ |
| d) $12 + (-18)$ | n) $3(-12)$ |
| e) $13 - 8$ | o) $(-3)(7)(-2)$ |
| f) $9 - 14$ | p) $(-2)(-6)(7)$ |
| g) $-2 - 12$ | q) $(-4)(-5)(-8)$ |
| h) $-6 - (-5)$ | r) $42 \div (-6)$ |
| i) $13 - (-6)$ | s) $(-54) \div (-3)$ |
| j) $-2 + 5 + (-8) + 4$ | t) $(-56) \div 8$ |

4) Simplificar las siguientes expresiones:

- a) $5 - 3 \times 4 \div 2$
- b) $16 \div (4)^2 + 5(4 - 11)$
- c) $3(3 - 7) \div 6 - 2$
- d) $4 - (-2)^2 \div (1 - 2)^2 \times 3 + 4$
- e) $5 + \{6 - [2 + (4 - 1)]\}$

Resolver.

- 5) Un jugador ganó \$600 en el casino. Luego, perdió \$300, ganó \$50 y perdió \$250. ¿Cuánto dinero ganó finalmente?
- 6) Juan tenía una cuenta de ahorros con un balance de \$270. Gastó \$40 en un pantalón y \$65 en libros. Luego depositó \$100. ¿Cuál es el balance actual?
- 7) Pedro perdió \$36 en 4 semanas. Expresar el promedio de dinero perdido semanalmente.

2.8 Prueba acumulativa

Seleccionar la contestación correcta.

- 1) ¿Cuál de los siguientes números es divisible por 2, 3 y 5?
 - A) 6,165
 - B) 8,415
 - C) 8,450
 - D) 9,270
- 2) ¿Cuál de los siguientes dígitos debe añadirse a 23, 46 _ para que sea divisible por 2 y por 3?
 - A) 6
 - B) 4
 - C) 3
 - D) 2
- 3) $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$ escrito en forma exponencial es:
 - A) $3^2 \times 2^5$
 - B) $2^3 \times 5^2$
 - C) $2^3 \times 5^3$
 - D) $3^2 \times 5^2$
- 4) La factorización prima de 90 es:
 - A) 5×18
 - B) 9×10
 - C) $2 \times 3^2 \times 5$
 - D) $3^2 \times 10$

- 5) ¿Cuáles son todos los divisores de 18?

- A) 2, 3, 6, 9
- B) 1, 2, 3, 6, 9, 18
- C) 1, 2, 3, 6, 8, 9, 18
- D) 1, 2, 6, 7, 18

- 6) El máximo común divisor de 30 y 48 es:

- A) 6
- B) 30
- C) 240
- D) 1,440

- 7) El mínimo común múltiplo de 32 y 96 es:

- A) 1
- B) 8
- C) 32
- D) 96

- 8) ¿Cuál de los siguientes enunciados es FALSO?

- A) 3 y 15 son factores de 90
- B) 31 y 39 son números primos
- C) 24 y 60 son múltiplos de 12
- D) El máximo común divisor de 24 y 35 es 1

- 9) $9 + 36 \div 3^2 + 3 =$

- A) 16
- B) 15
- C) 12
- D) 8

- 10) $3^2 \times 10^3 + 2^3 \times 10^2 =$

- A) 9,800
- B) 6,600
- C) 430
- D) 300

11) $3(32 - 16 \div 4) =$

- A) -84
- B) -12
- C) 12
- D) 84

12) $4 + 3[4 - 2(6 - 3)] \div 2 =$

- A) 1
- B) 7
- C) 9
- D) 13

13) ¿Cuál de los siguientes enunciados ilustra la propiedad distributiva?

- A) $5 + 4 = 4 + 5$
- B) $(7 + 8) + 3 = 7 + (8 + 3)$
- C) $41 + 0 = 41$
- D) $3(4 + 7) = 3(4) + 3(7)$

14) El Sr. González compró un sistema de computadoras por \$4,758. Hizo un pago inicial de \$1,500. El balance se pagará en 18 pagos iguales mensualmente. ¿Cuánto será el pago mensual?

- A) \$264
- B) \$235
- C) \$185
- D) \$181

15) El opuesto de -8 es:

- A) 8
- B) 1
- C) 0
- D) -8

16) ¿Cuál de los siguientes enunciados es CIERTO?

- A) $|7| = -7$
- B) $|-7| = -7$

C) $-|-7| = -7$

D) $-|-7| = 7$

17) $30 - 16 - 44 + 14 =$

- A) 44
- B) 16
- C) -16
- D) -44

18) ¿Cuál de los siguientes enunciados es CIERTO?

- A) $2 < -4$
- B) $-3 < -5$
- C) $|-5| + |4| = -1$
- D) $|-9| - |9| = 0$

19) $(5)(-8)(-1)^2(-2) =$

- A) -160
- B) -80
- C) 80
- D) 160

20) $(3 - 2)^2 + (2 - 3)^2 =$

- A) 2
- B) 1
- C) -1
- D) -2

21) $(-3)(-4)(-1)^3(-2)^2 =$

- A) -144
- B) -48
- C) 48
- D) 144

22) $(-1)^{1992} =$

- A) -1992
- B) -1

45
45
90

- C) 1
D) 1992

23) ¿Cuál es mayor?

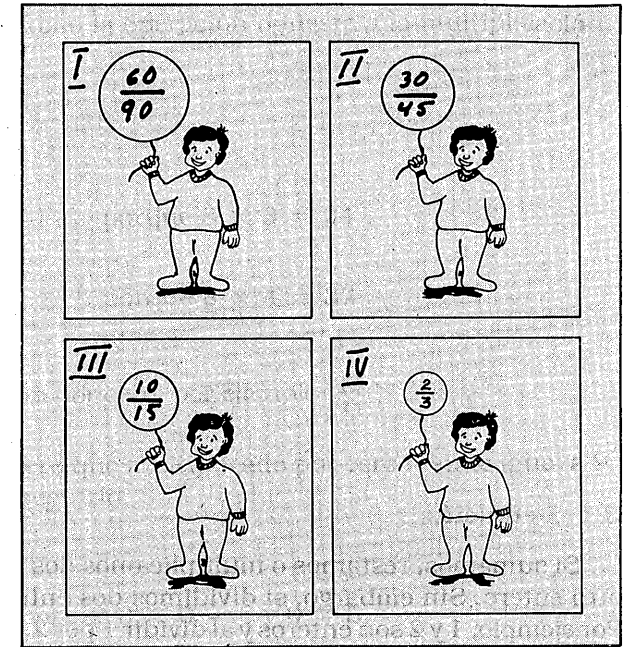
- A) 3^3
B) 5^2
C) $(-1)^{30}$
D) $(-2)^5$

24) ¿Cuál es menor?

- A) $(-2)^6$
B) $(-1)^{10}$
C) -4
D) -8

25) ¿Cuál de los siguientes es CIERTO?

- A) $|-30| = -30$
B) $-|8 + (-11)| = 3$
C) $(-1)^{100} = 100$
D) $3^2 - 2^3 = 1$



Una fracción se encuentra en su forma más simple si el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1.

FRACCIONES

3